P. E. DANKÓ, A. G. POPOV, T. YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

2

PARTE

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Matemáticas superiores en ejercicios y problemas

П. Е. Данко,
А. Г. Попов,
Т. Я. Кожевникова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

II

ЧАСТЬ

Издательство
«Высшая школа»
Москва

P.E. DANKÓ,
A.G. POPOV,
T.YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

En dos partes

2
parte

EDITORIAL · MIR ·
MOSCÚ

Traducido del ruso por
A.I. Samojválov

Primera edición, 1983
Primera reimpresión, 1990

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-00164-5
ISBN 5-03-00162-9

Índice

Capítulo I. Integrales dobles y triples

§ 1. Integral doble en coordenadas rectangulares

Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida en una región cerrada acotada D del plano xOy. Dividimos arbitrariamente la región D en n regiones elementales que tienen las áreas $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ y los diámetros $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (se llama *diámetro de una región* a la mayor de las distancias entre dos puntos de la frontera de esta región). Escogemos en cada región elemental un punto arbitrario $P_k(\xi_k; \eta_k)$ y multiplicamos el valor de la función en el punto P_k por el área de esta región.

Se denomina *suma integral* para la función $f(x, y)$ de la región D a la suma que tiene la forma siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta\sigma_n.$$

Se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ de la región D al límite de la suma integral a condición de que el mayor entre los diámetros de las regiones elementales tienda a cero:

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k.$$

Si la función $f(x, y)$ es continua en la región cerrada D, el límite de la suma integral existe y no depende del procedimiento de división de la región D en regiones elementales y de la selección de los puntos P_k (*teorema de existencia* de una integral doble).

Si $f(x, y) > 0$ en la región D, entonces la integral doble $\iint_D f(x, y)\,d\sigma$ es igual al *volumen del cuerpo cilíndrico* limitado de arriba por la superficie $z = f(x, y)$, de costado por la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y de abajo por la región D del plano xOy.

Propiedades principales de una integral doble

1ª. $\iint_D [f_1(x, y) \pm f^2(x, y)]\,d\sigma = \iint_D f_1(x, y)\,d\sigma \pm \iint_D f_2(x, y)\,d\sigma.$

2ª. $\iint_D c\cdot f(x, y)\,d\sigma = c\iint_D f(x, y)\,d\sigma$, donde c es una constante.

3ª. Si la región de integración D está dividida en dos regiones D_1 y D_2, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma.$$

En las coordenadas cartesianas la integral doble se suele escribir en la forma $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.

Reglas de cálculo de las integrales dobles

Se distinguen dos tipos principales de regiones de integración.

1. La región de integración D está limitada de los lados izquierdo y derecho por las rectas $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$ y de abajo y de arriba por las líneas curvas continuas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)]$ cada una de las cuales se interseca con la recta vertical sólo en un punto (fig. 1).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ en la cual x se considera constante.

2. La región de integración D está limitada de abajo y de arriba por las rectas $y = c$ e $y = d$ $(c < d)$ y del lado izquierdo y del lado derecho por las

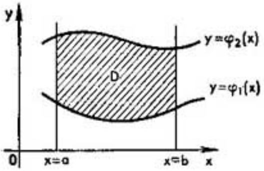

Fig. 1

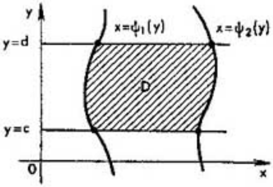

Fig. 2

líneas curvas continuas $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$ $[\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)]$ cada una de las cuales se interseca por la recta horizontal sólo en un punto (fig. 2).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$ en la cual y se considera constante.

Los segundos miembros de las fórmulas indicadas se llaman integrales *dobles* (o *reiteradas*).

En un caso más general la región de integración por medio de la división por partes se reduce a las principales.

1. Calcular $\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy$ si la región D es el rectángulo $0\leqslant x\leqslant 4$, $1\leqslant y\leqslant e$.

Resolución. Tenemos

$$\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_1^e \ln y\,dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4\cdot[y\ \ln\ y-y]_1^e=8\cdot(e-e+1)=8.$$

2. Calcular $\iint\limits_D (\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 y)\,dx\,dy$ si la región D es el cuadrado $0\leqslant x\leqslant \pi/4$, $0\leqslant y\leqslant \pi/4$.

Resolución. Hallamos

$$\iint\limits_D (\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\pi/4} dx\int\limits_0^{\pi/4}(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 y)\,dy=\int\limits_0^{\pi/4}\left[y\cos^2 x+\frac{y}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y\right]_0^{\pi/4}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)dx=\left[\frac{\pi}{8}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}.$$

3. Calcular $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)\,dy$.

Resolución. Tenemos

$$I=\int\limits_1^2\left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2}dx=\int\limits_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=0{,}9.$$

4. Calcular $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

Resolución. Vamos a construir la región D. La primera línea es una parábola que tiene por vértice el punto $(0;\ 2)$, simétrica respecto al eje Oy. La segunda línea es una recta. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones $y=2-x^2$ e $y=2x-1$, determinamos las coordenadas de los puntos de intersección $A\ (-3;\ -7)$, $B\ (1;\ 1)$ (fig. 3).

La región de integración pertenece al primer tipo. Encontramos

$$\iint_D (x-y)\,dx\,dy=\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy=$$

$$=\int_{-3}^{1}\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2} dx=\int_{-3}^{1}\left(2x-x^3-2+2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^3+\right.$$

$$\left.+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1}=4\frac{4}{15}.$$

5. Calcular $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las rectas $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

Resolución. Hallamos

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy=\int_2^3 dx\int_x^{2x}(x+2y)\,dy=$$

$$\int_2^3 [xy+y^2]_x^{2x}\,dx=\int_2^3 (2x^2+4x^2-x^2-x^2)\,dx=4\int_2^3 x^2\,dx=\frac{3}{4}x^3|_2^3=25\frac{1}{3}.$$

6. Calcular $\iint_D e^{x+\operatorname{sen} y}\cos y\,dx\,dy$ si la región D es un rectángulo $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$.

7. Calcular $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

8. Calcular $\iint_D (3x^2-2xy+y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

9. Cambiar el orden de integración en la integral $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$.

Resolución. La región de integración D está limitada por las líneas $x=-1$, $x=1$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$ (fig. 4). Vamos a cambiar el orden de integración para lo cual representamos la región dada en forma de dos regiones (del segundo tipo): D_1 limitada de los lados izquierdo y derecho por

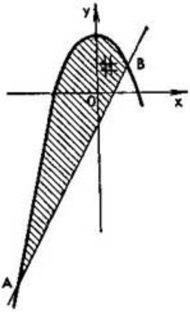

Fig. 3

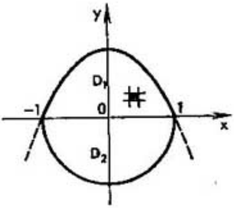

Fig. 4

las ramas de la parábola $x = \pm\sqrt{1-y}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ y D_2 limitada por los arcos de la circunferencia $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 0)$. Entonces

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

10. Calcular $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx \int\limits_0^{a} y\, dy$.

11. Calcular $\int\limits_1^{3} dx \int\limits_{x^2}^{x} (x-y)\, dy$.

12. Calcular $\iint\limits_D y \ln x\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

13. Calcular $\iint\limits_D (\cos 2x + \operatorname{sen} y)\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y - \pi = 0$.

14. Calcular $\iint\limits_D (3x + y)\, dx\, dy$, si la región D se define por las desigualdades $x^2 + y^2 \leqslant 9$, $y \geqslant (2/3)\, x + 3$.

15. Calcular $\iint\limits_D \operatorname{sen}(x + y)\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $x = 0$, $y = \pi/2$, $y = x$.

16. Calcular $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, si la región D es el triángulo que tiene por vértices A $(2; 3)$, B $(7; 2)$, C $(4; 5)$.

Cambiar el orden de integración:

17. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y)\,dy.$

18. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x, y)\,dy.$

19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

20. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\,dy.$

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

22. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\,dy.$

§ 2. Cambio de variables en una integral doble

1. Integral doble en coordenadas polares. La transformación de una integral doble, haciéndola pasar de las coordenadas rectangulares x, y a *las polares* ρ, θ ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, se lleva a cabo por la fórmula

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Si la región de integración D está limitada por dos semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ que salen del polo y por dos curvas $\rho = \rho_1(\theta)$ y $\rho = \rho_2(\theta)$, donde $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$ son funciones unívocas para $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ y $\rho_1(\theta) \leqslant \rho_2(\theta)$, entonces la *integral doble se calcula por la fórmula*

$$\iint\limits_D F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho,$$

donde $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, además, primeramente se calcula

$\int\limits_{\rho_1(\rho)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho$ en la cual θ se considera constante.

2. Integral doble en coordenadas curvilíneas. Supongamos que una integral doble se transforma pasando de las coordenadas rectangulares x, y a *las curvi-*

líneas u, v ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, donde las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en la región D' del plano $uO'v$ y el *jacobiano de transformación* en la región D' no se anula:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Con ello se establece una correspondencia recíprocamente unívoca y continua en ambas direcciones entre los puntos de la región D del plano xOy y los puntos de la región D' del plano $uO'v$ (fig. 5).

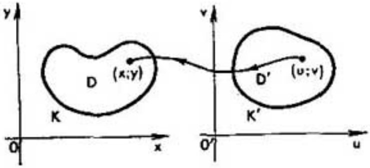

Fig. 5

En este caso la *fórmula de transformación de la integral doble* tiene el aspecto

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f[x(u,v), y(u, v)]\,|J|\,du\,dv.$$

Para el caso de las coordenadas polares

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

23. Pasando a las coordenadas polares, calcular $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ si D es el cuadrante I del círculo $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Resolución. Haciendo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_D \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}.$$

24. Calcular $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ si la región D es el anillo comprendido entre las circunferencias $x^2+y^2=e^2$ y $x^2+y^2=e^4$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas polares:

$$\iint\limits_D \ln\,(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint\limits_D \ln\rho^2\rho\,d\rho\,d\theta=2\iint\limits_D \rho\ln\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_e^{e^2}\rho\ln\rho\,d\rho.$$

Tomando por partes la integral en función de ρ, obtenemos

$$2\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho-\frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2}d\theta=\pi e^2(3e^2-1).$$

25. Calcular $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy$ si la región D es el cuadrado limitado por las rectas $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ (fig. 6).

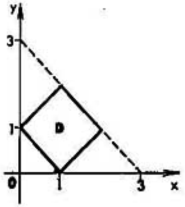

Fig. 6

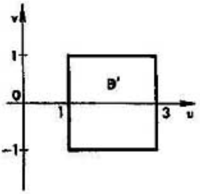

Fig. 7

Resolución. Hacemos $x+y=u$, $x-y=v$, de donde $x=(1/2)(u+v)$, $y=(1/2)(u-v)$. Entonces el jacobiano de transformación

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},\quad \text{o sea}\quad |J|=\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'} u^3v^2\,du\,dv$. Puesto que la región D' es también un cuadrado (fig. 7), entonces

$$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3\,du\int\limits_{-1}^1 v^2\,dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3\cdot\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-1}^1 du=\frac{1}{6}\int\limits_1^3 u^3(1+1)\,du=\frac{1}{12}u^4\Big|_1^3=\frac{20}{3}.$$

Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales dobles:

26. $\iint\limits_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy$ si la región D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant \pi^2$.

27. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$ si la región D está limitada por la semicircunferencia $y=\sqrt{1-x^2}$ y el eje Ox.

28. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ si la región D está limitada por la circunferencia $x^2+y^2=2ax$.

29. $\iint\limits_D \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ si la región D está limitada por las líneas $x^2+y^2=\pi^2/9$, $x^2+y^2=\pi^2$.

30. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ si la región D está limitada por las $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=4a^2$.

31. Calcular $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} dy$, introduciendo las nuevas variables $x=u(1-v)$, $y=uv$.

32. Calcular $\iint\limits_D dx\,dy$ si la región D está limitada por las líneas $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$.

Indicación: efectuar el cambio de las variables $x=(u/v)^{1/2}$, $y=(uv)^{1/2}$.

§ 3 Cálculo del área de una figura plana

El *área de la figura plana* limitada por la región D se determina por la fórmula

$$S=\iint\limits_D dx\,dy.$$

Si la región D está definida, por ejemplo, por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, entonces

$$S=\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Si la región D en las coordenadas polares está definida por las desigualdades $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, $\varphi(\theta) \leqslant \rho \leqslant f(\theta)$, entonces

$$S=\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_\alpha^\beta d\theta \int\limits_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)} \rho\,d\rho.$$

33. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

Resolución. Hallamos las coordenadas de los puntos de intersección de las líneas dadas, resolviendo el sistema de ecuaciones $x = 4y - y^2$ y $x + y = 6$ (se recomienda hacer el dibujo por cuenta propia). Como resultado obtenemos A (4; 2), B (3; 3). Por lo tanto,

$$S=\iint_D dx\,dy = \int_2^3 dy = \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 x\,\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy =$$

$$= \int_2^3 (-y^2+5y-6)\,dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 \frac{5}{2}y^2-6y\right]_2^3 = \frac{1}{6} \text{ (unidades cuadradas).}$$

34. Calcular el área de la figura limitada por las circunferencias $\rho = 1$, $\rho = (2/\sqrt{3}) \cos\theta$ (fuera de la circunferencia $\rho = 1$; fig. 8).

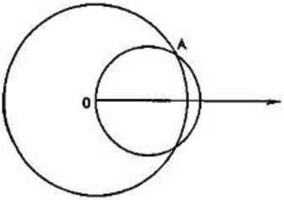

Fig. 8

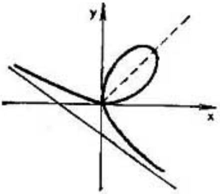

Fig. 9

Resolución. Determinamos las coordenadas del punto A; tenemos $1 = (2/\sqrt{3}) \cos\theta$; $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\theta = \pi/6$, o sea, A $(1; \pi/6)$. Entonces

$$S=\iint_D \rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{\pi/6} d\theta \int_1^{(2/\sqrt{3})\cos\theta} \rho\,d\rho =$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^{(2/\sqrt{3})\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/6}\left(\frac{4}{3}\cos^2\theta-1\right)d\theta =$$

$$=\int_0^{\pi/6}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos 2\theta-1\right)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}(2\cos 2\theta-1)\,d\theta =$$

$$=\frac{1}{3}\left[\operatorname{sen} 2\theta-\theta\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{18}(3\sqrt{3}-\pi) \text{ (unidades, cuadradas)}$$

35. Hallar el área limitada por la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Resolución. Haciendo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, llevamos la ecuación de la curva a las coordenadas polares. Como resultado obtenemos $\rho^2 = 2a^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

Es evidente que a la variación del ángulo polar θ de 0 a $\pi/4$ le corresponde un cuarto del área buscada. Por consiguiente,

$$S=4\iint\limits_{D}\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_{0}^{\pi/4}d\theta\int\limits_{0}^{a\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}}\rho\,d\rho=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\pi/4}\rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}}d\theta=2a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\operatorname{sen}2\theta\,d\theta=-a^2\cos2\theta\Big|_0^{\pi/4}=a^2.$$

36. Hallar el área de la figura limitada por la línea $x^3+y^3=$ $=axy$ (área del bucle; fig. 9).

Resolución. Llevamos la ecuación dada a las coordenadas polares: $\rho^3(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)=a\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, o sea, $\rho=a\operatorname{sen}\theta\cos\theta/(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)$. De eje de simetría del bucle sirve la semirrecta $\theta=\pi/4$, por eso

$$S=2\iint\limits_{D}\rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_{0}^{\pi/4}d\theta\int\limits_{0}^{a\operatorname{sen}\theta\cos\theta/(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)}\rho\,d\rho=$$

$$=a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{(\operatorname{sen}^3\theta-\cos^3\theta)^2}d\theta=a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^2\theta\cos^4\theta}{\cos^6\theta\,(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{3\,\mathrm{gt}^2\theta\,(\operatorname{tg}\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\frac{a^2}{3}\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{d\,(1+\operatorname{tg}^2\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\left[-\frac{a^2}{3\,(1+\operatorname{tg}^2\theta)}\right]_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{6}.$$

37. Calcular el área limitada por las líneas $x=y^2-2y$, $x+y=$ $=0$.

38. Calcular el área limitada por las líneas $y=2-x$, $y^2=$ $=4x+4$.

39. Calcular el área limitada por las líneas $y^2=4x-x^2$, $y^2=$ $=2x$ (fuera de la parábola).

40. Calcular el área limitada por las líneas $3y^2=25x$, $5x^2=9y$.

41. Calcular el área limitada por las líneas $y^2+2y-3x+1=$ $=0$, $3x-3y-7=0$.

42. Calcular el área de la figura más próxima a partir del origen de coordenadas, limitada por las líneas $y=\cos x$, $y=\cos 2x$, $y=0$.

43. Calcular el área limitada por las líneas $y=4x-x^2$, $y=$ $=2x^2-5x$.

44. Calcular el área limitada por las líneas $x=4-y^2$, $x+$ $+2y-4=0$.

45. Calcular el área limitada por las líneas $\rho=(2-\cos\theta)$, $\rho=2$ (fuera de la cardioide).

46. Calcular el área limitada por las líneas $\rho=2\,(1+\cos\theta)$, $\rho=2\cos\theta$.

47. Calcular el área limitada por las líneas $y^2=4\,(1-x)$, $x^2+y^2=4$ (fuera de la parábola).

§ 4. Cálculo del volumen de un cuerpo

El *volumen de un cuerpo cilíndrico* limitado de arriba por la superficie continua $z = f(x, y)$, de abajo por el plano $z = 0$ y del costado por la superficie cilíndrica recta que corta sobre el plano xOy la región D, se determina por la fórmula

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

48. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ y situado en el octante I.

Resolución. El cuerpo cuyo volumen se ha de calcular está limitado de arriba por el plano $z = 3x$, del costado por el cilindro parabólico $y = 1 + x^2$ y el plano $y = 5$. Por lo tanto, es un cuerpo cilíndrico. La región D está limitada por la parábola $y = 1 + x^2$ y las rectas $y = 5$ y $x = 0$. Por consiguiente, tenemos

$$v = \iint_D 3x\, dx\, dy = 3 \int_0^2 x\, dx \int_{1+x^2}^{5} dy = 3 \int_0^2 x \cdot [y]_{1+x^2}^{5}\, dx =$$

$$= 3 \int_0^2 (4x - x^3)\, dx = 3 \left[2x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 12 \text{ (unidades cúbicas).}$$

49. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ y situado en el octante I.

Resolución. El cuerpo dado está limitado de arriba por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. La región de integración D es un sector circular limitado por el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que no es más que la línea de intersección del paraboloide con el plano $z = 0$ y las rectas $y = x$ e $y = x\sqrt{3}$. Por consiguiente

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Puesto que la región de integración es una parte del círculo y la función subintegral depende de $x^2 + y^2$, es racional pasar a las coordenadas polares. La ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en estas coordenadas tomará la forma $\rho = 1$, la función subintegral es igual a $1 - \rho^2$ y los límites de integración respecto a θ los determinamos a partir de las ecuaciones de las rectas: $k_1 = \operatorname{tg} \theta_1 = 1$, o sea, $\theta_1 = \pi/4$; $k_2 = \operatorname{tg} \theta_2 = \sqrt{3}$, o sea, $\theta_2 = \pi/3$. De este modo, tenemos

$$V = \iint_D (1 - \rho^2)\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{48} \text{ (unidades cúbicas)}$$

50. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$.

Resolución. Examinemos la octava parte del cuerpo dado (fig. 10):

$$\frac{1}{8}V=\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=$$
$$=\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3.$$

Por lo tanto, $V=16a^3/3$.

51. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$.

52. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x=2y^2$, $x+2y+z=4$, $y=0$, $z=0$.

53. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2+4y^2+z=1$, $z=0$.

54. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

55. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=4-x^2$, $2x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

56. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z^2=xy$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=4$.

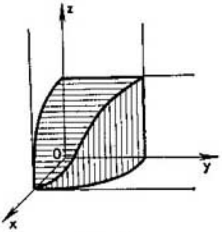

Fig. 10

57. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=5x$, $x^2+y^2=9$, $z=0$.

58. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x+y+z=6$, $3x+2y=12$, $3x+y=6$, $y=0$, $z=0$.

59. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=x+y+1$, $y^2=x$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

60. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=0$, $z=xy$, $x^2+y^2=4$.

61. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $y=0$, $z=x/2$, $z=x$.

§ 5. Cálculo del área de una superficie

Si una superficie lisa unívoca está definida por la ecuación $z=f(x, y)$, entonces el *área de la superficie* se expresa por la fórmula

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

donde D es la proyección de la superficie dada sobre el plano xOy. Análogamente, si la superficie está definida por la ecuación $x = f(y, z)$, entonces

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz,$$

donde D es la proyección de la superficie sobre el plano yOz; si la ecuación de la superficie tiene la forma $y = f(x, z)$, entonces

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz,$$

donde D es la proyección de la superficie sobre el plano xOz.

62. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (fig. 11).

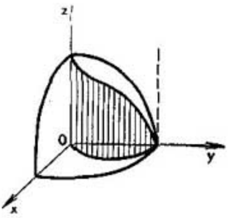

Fig. 11

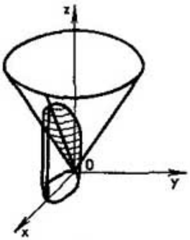

Fig. 12

Resolución. De la ecuación de la esfera tenemos (para el octante I):

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 + x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

La parte de la esfera situada en el octante I se proyecta en el semicírculo limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = ay$ y el eje Oy. Este semicírculo es precisamente la región de integración D.

La superficie está situada en cuatro octantes y por eso la superficie buscada

$$S = 4a \iint\limits_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Pasamos a las coordenadas polares, entonces la ecuación de la circunferencia toma la forma $\rho = a \operatorname{sen}\theta$ y

$$S = 4a \iint_D \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 4a \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \operatorname{sen}\theta} \frac{\rho\, d\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= -4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-\rho^2}\, \Big|_0^{a \operatorname{sen}\theta} d\theta = -4a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - 1)\, d\theta =$$

$$= -4a^2 [\operatorname{sen}\theta - \theta]_0^{\pi/2} = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \text{ (unidades cuadradas).}$$

63. Hallar el área de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ (fig. 12).

Resolución. De la ecuación del cono tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. La región de integración D es el círculo limitado por la cincunferencia $x^2+y^2=2x$, o bien $\rho = 2\cos\theta$.
Entonces

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \sqrt{2} \iint_D dx\, dy = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\, d\rho =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_2^{\pi/2} \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 4\cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 2\sqrt{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi\sqrt{2} \text{ (unidades cuadradas).}$$

64. Calcular el área de la superficie del cilindro $x^2 = 2z$ cortada por los planos $x - 2y = 0$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$ (fig. 13).

Resolución. De región de integración sirve el triángulo OAB. De la ecuación del triángulo tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Entonces

$$S = \iint_D \sqrt{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\, dx \int_{x/2}^{2x} dy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{3}{2} x \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{3}{4} \int_0^{2\sqrt{2}} (1+x^2)^{1/2}\, d(1+x^2) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 13 \text{ (unidades cuadradas).}$$

65. Calcular el área de la parte de la superficie del paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ cortada por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$.

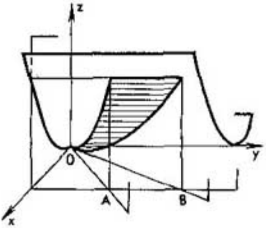

Fig. 13

Resolución. La región de integración es la circunferencia $y^2 + z^2 = 1$ (situada en el plano yOz). De la ecuación del paraboloide tenemos $\frac{\partial x}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial x}{\partial z} = -2z$. Entonces

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz = \iint_D \sqrt{1 + 4(y^2+z^2)}\, dy\, dz.$$

Pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} \pi \text{ (unidades cuadradas).}$$

66. Hallar el área de la parte de la superficie $y = x^2 + z^2$ cortada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y situada en el octante I.

67. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ cortada por el cilindro $x^2/4 + y^2 = 1$.

68. Hallar el área de la parte del plano $z = x$ encerrada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por encima del plano $z = 0$.

69. Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $z = x^2$ cortada por los planos $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

70. Calcular el área de la superficie del cono $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

71. Calcular el área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

72. Hallar el área de la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ cortada por los planos $x = 1$, $y = 4$, $z = 0$.

§ 6. Aplicaciones de la integral doble

Si una placa ocupa la región D del plano xOy y tiene una densidad superficial variable $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la *masa* M de la placa se expresa por la integral doble:

$$M = \iint_D \gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

Los *momentos estáticos* de la placa respecto a los ejes Ox y Oy se determinan por las fórmulas

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint_D x\gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

Si la placa es homogénea, $\gamma = \text{const.}$

Las *coordenadas del centro de gravedad* de la placa se pueden determinar por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M},$$

donde M es la masa de la placa y M_x, M_y, los momentos estáticos de ésta respecto a los ejes de las coordenadas.

Si la placa es homogénea, estas fórmulas adoptan la forma

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\, dx\, dy}{S}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\, dx\, dy}{S},$$

donde S es el área de la región D.

Los *momentos de inercia* de la placa *respecto a los ejes* Ox y Oy se determinan por las fórmulas

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x, y)\, dx\, dy, \qquad I_y = \iint_D x^2\gamma(x, y)\, dx\, dy$$

y el *momento de inercia respecto al origen de las coordenadas* se calcula por la fórmula

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y)\, dx\, dy = I_x + I_y.$$

Haciendo en estas fórmulas $\gamma(x, y) = 1$, obtendremos las expresiones para calcular los momentos geométricos de inercia de una figura plana.

73. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las líneas $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$ (fig. 14).

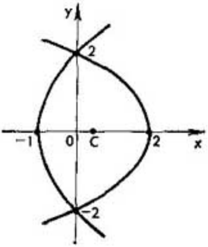

Fig. 14

Resolución. Puesto que la figura es simétrica respecto al eje Ox, $\bar{y} = 0$. Queda hallar $\bar{x}$.

Determinamos el área de la figura dada:

$$S = \iint_D dx\,dy = 2\int_0^2 dy \int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx =$$

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right) dy = 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4}\right) dy = 6\left[y - \frac{1}{12}y^3\right]_0^2 = 8.$$

Entonces

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\iint_D x\,dx\,dy = \frac{1}{8}\cdot 2\int_0^2 dy \int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\frac{1}{4}(4-y^2)^2 - \frac{1}{16}(y^2-4)^2\right] dy =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4\right) dy = \frac{1}{8}\left[3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3y^5}{80}\right]_0^2 = \frac{2}{5}.$$

74. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ y su cuerda $x/5 + y/3 = 1$.

Resolución. Hallamos el área del segmento:

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_0^5 dx \int_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy =$$

$$= \int_0^5 \left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2} - 3 + \frac{3}{5}x\right) dx = \frac{15}{4}(\pi - 2).$$

Entonces

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 x\,dx\int\limits_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5\left[\frac{3}{5}x\sqrt{25-x^2}-3x\left(1-\frac{x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left[-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{5}\right]_0^5=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left(25-\frac{75}{2}+25\right)=\frac{10}{3(\pi-2)};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 dx\int\limits_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} y\,dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^5\left[\frac{9}{25}(25-x^2)-9\left(1-\frac{x}{5}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{2\cdot 9\cdot 2}{15(\pi-2)\cdot 25}\int\limits_0^5(5x-x^2)\,dx=\frac{12}{125(\pi-2)}\left[\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^5=$$

$$=\frac{12}{125(\pi-2)}\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{2}{\pi-2}.$$

75. Calcular el momento polar de inercia de la figura limitada por las líneas $x/a+y/b=1$, $x=0$, $y=0$.

Resolución. El momento de inercia respecto al origen de coordenadas es igual a

$$I_0=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{(b/a)(a-x)}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{(b/a)(a-x)}dx=\int\limits_0^a\left[\frac{b}{a}x^2(a-x)+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}bx^3-\frac{b}{4a}x^4-\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{4}(a-x)^4\right]_0^a=\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$$

76. Calcular el momento de inercia de la figura, limitada por la cardioide $\rho=a(1+\cos\theta)$, con respecto al eje Ox.

Resolución. Pasando a las coordenadas polares en la fórmula $I_x = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy$, obtenemos

$$I_x = \iint\limits_D \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\rho\,d\rho\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \int\limits_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^3\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{1}{4}\rho^4 \Big|_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta = \frac{1}{4}a^4 \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,(1+\cos\theta)^4\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}a^4 \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,(1+4\cos\theta+6\cos^2\theta+4\cos^3\theta+\cos^4\theta)\,d\theta = \frac{21}{32}\pi a^4.$$

77. Determinar el centro de gravedad del área limitada por las líneas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$.

78. Determinar el centro de gravedad del área limitada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

79. Determinar el centro de gravedad del semisegmento de la parábola $y^2 = ax$ cortado por las rectas $x = a$, $y = 0$ $(y > 0)$.

80. Hallar el centro de gravedad del área limitada por un bucle de la curva $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$.

81. Hallar el centro de gravedad del área limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$.

82. Hallar el centro de gravedad del área limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = 2p$.

83. Hallar el centro de gravedad del área limitada por las líneas $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$.

84. Calcular el momento de inercia del área, limitada por las líneas $y = 2\sqrt{x}$, $x + y = 3$, $y = 0$, con respecto al eje Ox.

85. Calcular el momento polar de inercia del área limitada por las rectas $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

86. Calcular el momento de inercia del área limitada por las líneas $y = 4 - x^2$, $y = 0$, con respecto al eje Ox.

87. Calcular el momento de inercia del área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, con respecto a su eje mayor.

88. Calcular la masa de una placa cuadrada de lado a, cuya densidad en un punto cualquiera es proporcional al cuadrado de la distancia entre este punto y uno de los vértices del cuadrado.

89. Calcular la masa de una placa circular de radio r si su densidad es inversamente proporcional a la distancia entre un punto y el centro y es igual a δ en el borde de la placa.

90. Calcular el momento estático de una placa, que tiene forma del triángulo rectángulo con catetos $|OA| = a$, $|OB| = b$, respecto al cateto OA, si la densidad de la placa en un punto cualquiera es igual a la distancia entre el punto y el cateto OA.

§ 7. Integral triple

Sea que la función $f(x, y, z)$ está definida en una región cerrada limitada T. Dividimos arbitrariamente la región T en n regiones elementales $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de diámetros $d_1, d_2, \ldots, d_n$ y volúmenes $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Tomamos en cada región elemental un punto arbitrario $P_k(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$ y multiplicamos el valor de la función en el punto P_k por el volumen de esta región.

Se llama *suma integral* para la función $f(x, y, z)$ de la región T a la suma que tiene la forma $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta V_k$.

Se denomina *integral triple* de la función $f(x, y, z)$ de la región T al límite de la suma integral, a condición de que el mayor entre los diámetros de las regiones elementales tienda a cero:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dV = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta V_k.$$

Para la función continua en la región T este límite existe y no depende del procedimiento de división de la región T en regiones elementales ni de la selección de los puntos P_k (*teorema de existencia* de una integral triple).

Si $f(x, y, z) > 0$ en la región T, entonces la integral triple $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dV$ no es más que la *masa* del cuerpo que ocupa la región T y tiene una densidad variable $\gamma = f(x, y, z)$ (interpretación física de la integral triple).

Las propiedades principales de las integrales triples son análogas a las de las integrales dobles.

En las coordenadas cartesianas la integral triple se suele escribir en la forma $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

Sea que la región de integración T se define por las desigualdades $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$, donde $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$ son funciones continuas. Entonces la integral triple de la función $f(x, y, z)$, extendida sobre la región T, se calcula por la fórmula

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Si para calcular una integral triple se necesita pasar de las variables x, y, z a las nuevas variables u, v, w ligadas con x, y, z por las relaciones $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, donde las funciones $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden, establecen una correspondencia recíprocamente unívoca y continua en ambas direcciones entre los puntos de la región T del espacio $Oxyz$ y los puntos de cierta región T' del espacio $Ouvw$ y el jacobiano J en la región T' no se anula

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces se usa la fórmula

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_T f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J|\,du\,dv\,dw.$$

En particular, al pasar de las coordenadas cartesianas x, y, z a las *coordenadas cilíndricas* ρ, φ, z (fig. 15) ligadas con x, y, z por las relaciones

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z = z\ (0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty),$$

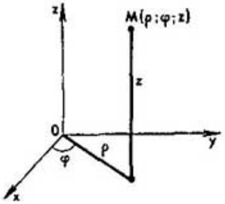

Fig. 15

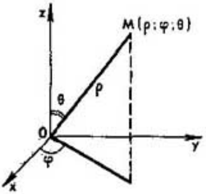

Fig. 16

el jacobiano de transformación $J = \rho$, y la *fórmula de transformación de la integral triple, representándola en las coordenadas cilíndricas*, tiene la forma

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Al pasar de las coordenadas cartesianas x, y, z a las *coordenadas esféricas* ρ, φ, θ (fig. 16) ligadas con x, y, z por las relaciones

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = \rho\cos\theta$$
$$(0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta < \pi),$$

el jacobiano de transformación $J = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta$, y la *fórmula de transformación de la integral triple, representándola en las coordenadas esféricas*, tiene la forma

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_T f(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

91. Calcular $I = \iiint_T z\,dx\,dy\,dz$, donde la región T se define por las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, $x \leqslant y \leqslant 2x$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Resolución. Tenemos

$$I=\int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} (1-x^2-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left[y-yx^2-\frac{1}{3}\,y^3\right]_x^{2x} dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(2x-2x^3-\frac{8}{3}\,x^3-x+x^3+\frac{1}{3}\,x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(x-\frac{10}{3}\,x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,x^2-\frac{5}{6}\,x^4\right]_0^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16}\right)=\frac{7}{192}.$$

92. Calcular $I=\iiint\limits_T x^2\,dx\,dy\,dz$ si T es la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas esféricas. En la región T las coordenadas ρ, φ y θ varían así: $0\leqslant\rho\leqslant R$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta<\pi$. Por consiguiente,

$$I=\iiint\limits_T \rho^4 \operatorname{sen}^3\theta\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^R\rho^4\,d\rho=$$

$$=\frac{R^5}{5\cdot 2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\left[\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)\,d\,(\cos\theta)=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

93. Calcular $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ si la región T está limitada por el cilindro $x^2+y^2=2x$ y los planos $y=0$, $z=0$, $z=a$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas cilíndricas. En estas coordenadas la ecuación del cilindro tomará la forma $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, o bien $\rho^2(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)=2\rho\cos\varphi$, o sea, $\rho=2\cos\varphi$. Por consiguiente, en la región T las coordenadas ρ, φ y z varían así: $0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi<\pi/2$, $0\leqslant z\leqslant a$. Por eso

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T z\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho\int_0^a z\,dz=\frac{1}{2}\,a^2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\, d(\operatorname{sen}\varphi)=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left[\operatorname{sen}\varphi-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{8}{9}a^2.$$

94. Calcular $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ si la región T es la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

Resolución. Introducimos las coordenadas esféricas: las nuevas variables varían dentro de los límites $0\leqslant\rho\leqslant r$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta<\pi/2$. Por lo tanto

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T \rho^4\operatorname{sen}^3\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=$$

$$=\int_0^r\rho^4\,d\rho\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\int_0^r\rho^4\,d\rho\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta-1)\,d(\cos\theta)=$$

$$=2\pi\int_0^r\rho^4\,d\rho\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi r^5.$$

95. Calcular $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, si la región T es el paralelepípedo rectangular definido por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant$ $\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$.

96. Calcular $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, si la región T está limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$.

97. Calcular $\iiint\limits_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$ si la región T está limitada por las superficies $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

98. Calcular $\iiint\limits_T (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, si la región T es el prisma de tres caras limitado por los planos $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$.

99. Calcular $\iiint\limits_T (x^2+y+z^2)^3\,dx\,dy\,dz$, si la región T está limitada por el cilindro $x^2+z^2=1$ y los planos $y=0$, $y=1$.

100. Calcular $\iiint\limits_T (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$, donde la región T es la parte común del paraboloide $z\geqslant(x^2+y^2)/(2a)$ y de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$.

101. Calcular $\iiint_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$ donde la región T está limitada por las superficies $z = (x^2 + y^2)/2$, $z = 2$.

102. Calcular $\iiint_T dx\,dy\,dz$, donde la región T es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$.

103. Calcular $\iiint_T \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$ si T es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

§ 8. Aplicaciones de la integral triple

El *volumen del cuerpo* que ocupa la región T se determina por la fórmula

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz.$$

Si la densidad del cuerpo es variable, o sea, $\gamma = \gamma(x, y, z)$, entonces la masa del cuerpo que ocupa la región T se calcula por la fórmula

$$M = \iiint_T \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Las *coordenadas del centro de gravedad* del cuerpo se determinan por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_T \gamma x\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_T \gamma y\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_T \gamma z\,dx\,dy\,dz,$$

Si $\gamma = 1$, tenemos

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_T x\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_T y\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_T z\,dx\,dy\,dz$$

($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ son las coordenadas del centro geométrico de gravedad).

Los *momentos de inercia* (geométricos) con respecto a los ejes de coordenadas son, respectivamente, iguales a

$$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\quad I_y = \iiint_T (z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

104. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $hz = x^2 + y^2$, $z = h$ (fig. 17).

Resolución. El cuerpo dado está limitado de abajo por el paraboloide $z = (x^2 + y^2)/h$, de arriba por el plano $z = h$ y se proyecta al círculo $x^2 + y^2 \leqslant h^2$

del plano xOy. Utilizamos las coordenadas cilíndricas en las cuales la ecuación del paraboloide tomará la forma $z = \rho^2/h$. El volumen del cuerpo es igual a

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho\,d\rho \int_{\rho^2/h}^h dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(h - \frac{\rho^2}{h}\right) \rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4h}\right]_0^h d\varphi =$$

$$= \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{2}.$$

105. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo prismático limitado por los planos $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$.

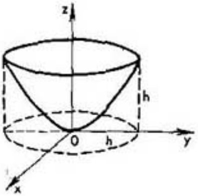

Fig. 17

Resolución. Determinamos el volumen del cuerpo examinado:

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{(3-x)/2} dz = \int_0^3 dx \int_1^3 \frac{3-x}{2} dy =$$

$$= \int_0^3 (3-x)\,dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Entonces

$$\bar{x} = \frac{2}{9} \iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{9} \int_0^3 x\,dx \int_1^3 dy \int_0^{(3-x)/2} dz =$$

$$= \frac{2}{9} \int_0^3 x\,dx \int_1^3 \frac{3-x}{2} dy = \frac{2}{9} \int_0^3 x(3-x)\,dx = \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 1;$$

$$\bar{y}=\frac{2}{9}\iiint_T y\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y\,dy\int_0^{(3-x)/2} dz=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y\,(3-x)\,dy=\frac{4}{9}\int_0^3 (3-x)\,dx=\frac{4}{9}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=2;$$

$$\bar{z}=\frac{2}{9}\iiint_T z\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_0^3 dy\int_0^{(3-x)/2} z\,dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}\,dx\int_1^3 dy=\frac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3=\frac{1}{2}.$$

106. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

107. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el plano $z=0$, la superficie cilíndrica $x=(x^2+y^2)/2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ (dentro del cilindro).

108. Hallar la masa del cubo $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ si la densidad en el punto $(x;\,y;\,z)$ es $\gamma\,(x,\,y,\,z)=x+y+z$.

109. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $x+y=1$, $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

110. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$.

111. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por los planos $2x+3y-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ y la superficie cilíndrica $z=y^2/2$.

112. Hallar el momento de inercia del cubo $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ respecto a su arista.

§ 9. Integrales en función de un parámetro. Derivación e integración bajo el signo integral

Consideremos la integral

$$I\,(\lambda)=\int_a^b f\,(x,\,\lambda)\,dx \tag{1}$$

en la cual λ es un parámetro variable y la función $f\,(x,\,\lambda)$ de dos variables está definida para todos los valores de x en el intervalo $[a,\,b]$ y para todos los valores de λ en el conjunto $\{\lambda\}$. En estas condiciones la integral (1) es la función del parámetro λ.

Reviste gran importancia la cuestión acerca de la derivada de la función $I\,(\lambda)$ del parámetro λ. Supongamos que la función $f\,(x,\,\lambda)$ y la derivada parcial

$\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ son continuas en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$. En este caso existe la derivada

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{d\lambda}\, dx. \qquad (2)$$

Si es admisible la permutación del signo de la derivada (de λ) y del signo integral (de x), entonces se dice que la función (1) se puede *derivar respecto al parámetro bajo el signo integral*. En la fórmula (2) se supone que los límites de integración a y b no dependen del parámetro λ. Sin embargo, si a y b dependen de λ, entonces

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x, \lambda)}{d\lambda}\, dx + b'(\lambda) f[b(\lambda), \lambda] - a'(\lambda) f[a(\lambda), \lambda]. \qquad (3)$$

Para derivar respecto al parámetro una integral impropia $\int_0^\infty f(x, \lambda)\, dx$ con el límite infinito es necesario que las integrales $\int_0^\infty f(x, \lambda)\, dx$ y $\int_0^\infty \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx$ existan para $0 < \lambda < \infty$.

La fórmula de integración respecto al parámetro λ de la integral definida (1) bajo el signo integral en el intervalo $[\alpha, \beta]$ tiene la forma

$$\int_\alpha^\beta I(\lambda) d\lambda = \int_\alpha^\beta d\lambda \int_a^b f(x, \lambda)\, dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, \lambda)\, d\lambda. \qquad (4)$$

La función subintegral $f(x, \lambda)$ debe ser una función continua de dos variables en la región finita de integración. En caso de una región infinita de integración se obtendrá una integral múltiple impropia.

113. Hallar $\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx$, donde m y n son números enteros positivos.

Resolución. Examinemos la integral

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1},$$

aquí $f(x, m) = x^m$ es la función continua en el intervalo $0 < x < 1$ si $m > 0$. Hallamos la derivada de esta integral con respecto a m.

$$\frac{d}{dm} \int_0^1 x^m\, dx = \int_0^1 x^m \ln x\, dx = -\frac{1}{(m+1)^2}.$$

Derivando con respecto a m una vez más, obtenemos

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^2\,dx = \frac{2!}{(m+1)^3}.$$

Después de derivar n veces respecto a m nos queda

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

114. Hallar $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}}$ donde n es un número entero positivo y $\lambda > 0$.

Resolución. Examinamos la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/2}}.$$

Derivando con respecto al parámetro λ, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}}.$$

Después de derivar n veces nos queda

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^n \cdot \sqrt{\lambda}}.$$

115. Hallar $I(k, \lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-kx} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\,dx$ e $I_1(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\,dx$.

Resolución. Derivado la integral I con respecto a λ, encontramos

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \lambda x\,dx = \left[\frac{e^{-kx}}{k^2+\lambda^2} (\lambda \operatorname{sen} \lambda x - k \cos \lambda x) \right]_0^\infty = \frac{k}{k^2+\lambda^2}.$$

Ahora, de la ecuación $\frac{dI}{d\lambda} = \frac{k}{k^2+\lambda^3}$ se puede hallar I; tenemos

$$I(k, \lambda) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\,dx = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k}.$$

Hallamos la integral $I_1(\lambda)$ sustituyendo en la expresión para $I(k, \lambda)$ el valor de $k = 0$:

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\,dx = \lim_{k\to+0} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k} = \begin{cases} -\pi/2, & \text{si } \lambda < 0, \\ 0, & \text{si } \lambda = 0, \\ \pi/2, & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

El gráfico de la función $I_1(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,dx$ se compone de dos semirrectas y el punto 0 (fig. 18).

116. Hallar $I=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}$.

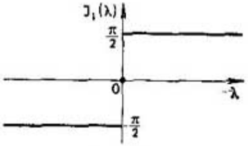

Fig. 18

Resolución. Derivando respecto al parámetro λ, tenemos

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda},\quad \text{o sea,}\quad \frac{dI}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda},\ I=\ln\lambda.$$

117. Calcular $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ (integral de Euler—Poisson).

Resolución. Hacemos $x=\lambda t$, donde $\lambda>0$; entonces $dx=\lambda\,dt$ e $I=$ $=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2t^2}\,dt$. Multiplicamos por $e^{-\lambda^2}\,d\lambda$ ambos miembros de la última igualdad y, utilizando la fórmula (4), integramos con respecto a λ de 0 a ∞:

$$I\cdot\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2}\,d\lambda=I^2=\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2}\cdot\lambda\,d\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2t^2}\,dt.$$

Cambiando el orden de integración, obtendremos

$$I^2=\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}e^{-(1+t^2)\lambda^2}\cdot\lambda\,d\lambda=\int_0^{\infty}\left[-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)\lambda^2}\right]_0^{\infty}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{4},\quad \text{o sea, } I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

118. Hallar $I(\lambda)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-\lambda^2/x^2}\,dx.$

Resolución. Derivando con respecto al parámetro λ, tenemos

$$\frac{dI}{d\lambda}=-2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-\lambda^2/x^2}\lambda\cdot\frac{dx}{x^2}.$$

Cambiamos la variable de integración: $\lambda/x=z$, $(-\lambda/x^2)\,dx=dz$, $x^2=\lambda^2/z^2$; con ello z varía de ∞ a 0. De este modo,

$$\frac{dI}{d\lambda}=2\int\limits_{\infty}^{0} e^{-\lambda^2/z^2-z^2}dz=-2\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda^2/z^2-z^2}\,dz, \quad \text{o bien} \quad \frac{dI}{d\lambda}=-2I.$$

Por consiguiente, $\frac{dI}{I}=-2d\lambda$, $\ln I=-2\lambda+\ln C$, $I=Ce^{-2\lambda}$. Para hallar C hacemos $\lambda=0$; entonces $I(0)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=dx=\sqrt{\pi}/2$ (integral de Euler-Poisson), o sea, $C=\sqrt{\pi}/2$.

De suerte que la integral buscada $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\lambda}$.

119. Hallar $I=\int\limits_0^{\lambda}\frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}\,dx.$

Resolución. Hallamos la derivada total $\frac{dI}{d\lambda}$ por la fórmula (3);

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}\,dx+\frac{\ln(1+\lambda\cdot\lambda)}{1+\lambda^2}\cdot\frac{d\lambda}{d\lambda},$$

o bien

$$\frac{dI}{d\lambda}=\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}+\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+2x)(1+x^2)}\,dx.$$

Descomponemos la fracción subintegral en fracciones elementales e integramos:

$$\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}\,dx=\int\limits_0^{\lambda}\frac{-\lambda\,dx}{(1+\lambda^2)(1+\lambda x)}+\int\limits_0^{\lambda}\frac{x+\lambda}{(1+\lambda^2)(1+x^2)}\,dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{1+\lambda^2}\ln(1+\lambda x)+\frac{1}{2(1+\lambda^2)}\ln(1+x^2)+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}x\right]_0^{\lambda}=$$

$$=-\frac{\ln(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda.$$

De este modo,

$$\frac{dI}{d\lambda}=\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda.$$

De aquí

$$I=\int_0^{\lambda}\left[\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda\right]d\lambda.$$

Haciendo $\lambda=\operatorname{tg}\varphi$, obtendremos

$$I=\int_0^{\varphi}\frac{\ln\sec^2\varphi}{2\sec^2\varphi}\cdot\sec^2\varphi\,d\varphi+\int\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi}\cdot\varphi\sec^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\int_0^{\varphi}\ln\cos\varphi\,d\varphi+\int_0^{\varphi}\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi.$$

Tomando por partes la primera integral, hallamos

$$I=-\varphi\ln\cos\varphi\Big|_0^{\varphi}-\int_0^{\varphi}\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi+\int_0^{\varphi}\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi=-\varphi\ln\cos\varphi,$$

o finalmente,

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\lambda\cdot\ln(1+\lambda^2).$$

Hallar las integrales:

120. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\,dx$ **121.** $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\operatorname{arctg}\lambda x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

122. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$ **123.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1+\operatorname{sen}\alpha\cos x)\frac{dx}{\cos x}.$

124. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx.$ **125.** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\lambda x}{x(1+x^2)}\,dx.$

126. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^{\lambda}-x^{\mu}}{\ln x}\,dx;\quad \lambda>0,\quad \mu>0.$

127. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx;\quad \alpha>0,\beta>0.$

128. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(1-\lambda^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx;\quad \lambda^2<1.$

§ 10. Función gamma. Función beta

1. Función gamma. Se llama *función gamma* (o *integral de Euler de segundo género*) a una integral que tiene la forma

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{1}$$

La integral (1), función del parámetro p, es impropia, ya que el límite superior es igual a la infinidad y, además, porque para $x\to 0$ y $p<1$ la función subintegral crece indefinidamente. La integral (1) converge cuando $p>0$ y diverge cuando $p\leqslant 0$. La función gamma es una de las más importantes funciones (después de las elementales) para el análisis y sus aplicaciones.

Propiedades principales de la función gamma

1ª. La función $\Gamma(p)$ es continua y tiene la derivada continua $\Gamma'(p)$ para $p>0$.

2ª. Tiene lugar la igualdad

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p). \tag{2}$$

3ª. Después de aplicar n veces la fórmula (2), se obtiene la relación

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)\cdot p\cdot\Gamma(p). \tag{3}$$

4ª. Si en la fórmula (3) hacemos $p=1$ y tomamos en cuenta que $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$, se obtiene la igualdad

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{4}$$

Si $n=0$, entonces $0!=\Gamma(1)=1$.

5ª. La función $\Gamma(p)$ da la posibilidad de extender el concepto de factoria $n!$ determinado solamente para los valores naturales de n sobre el campo de cualesquiera valores positivos del argumento. De la fórmula (2) resulta que si $p\to 0$, enctonces $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}\to+\infty$, o sea, $\Gamma(0)=+\infty$.

6ª. Cuando $p=-n$, de la fórmula (2) se deduce que

$$\Gamma(-n)=\frac{\Gamma(-n+1)}{-n}=\frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)}=-\frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)}=\cdots$$

$$\cdots=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=(-1)^n\cdot\infty,$$

o sea, $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

7ª. En general, la función $\Gamma(p)$ se puede ampliar al caso de valores negativos del argumento p. Puesto que $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, entonces $\Gamma(p+1)$ tiene sentido si $-1<p<0$.

Si $-n<p<-(n-1)$, entonces de la fórmula (3) resulta que

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}.$$

Con ayuda de la sustitución $p+n=\alpha$, de donde $p=-n+\alpha$, la última fórmula se transforma obteniendo el aspecto

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} \tag{5}$$

y para $-n<p<-(n-1)$ el signo $\Gamma(p)$ se determina por el factor $(-1)^n$.

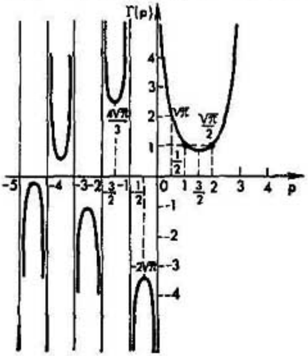

Fig. 19

8ª. Utilizando la fórmula (2) se pueden obtener los valores de $\Gamma(p)$ para un argumento semientero:

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left[1+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{3}{2}\right)=\cdots$$

$$\cdots=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots5\cdot3\cdot1}{2^m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

o bien

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{m!\,2^{2m}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

9ª. Tiene lugar la *fórmula de complemento*

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\qquad(0<p<1). \tag{7}$$

Si en esta fórmula hacemos $p=1/2$, entonces $[\Gamma(1/2)]^2=\pi/\operatorname{sen}(\pi/2)=\pi$, o sea, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Utilizando las propiedades principales, se puede calcular $\Gamma(p)$ para cualquier p. Los valores de la función gama se dan en la tabla 1, pág. 448).
El gráfico de la función $\Gamma(p)$ está representado en la fig. 19.

129. Calcular la integral de Euler—Poisson $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $x^2=t$, de donde $x=\sqrt{t}$, $dx=dt/(2\sqrt{t})$ y, por consiguiente,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{1/2-1}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

130. Calcular $\Gamma(-1/2)$.

Resolución. Utilizando la fórmula $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$, obtenemos

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(-1/2+1)}{(-1/2}=\frac{\Gamma(1/2)}{(-1/2)}=-2\sqrt{\pi}.$$

131. Calcular $\Gamma(-9/2)$.

Resolución. Utilizando la fórmula (5) para $\alpha=1/2$ y $n=5$, resulta

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-5\right)=\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{(-1)^5\cdot\Gamma(1/2)}{(1-1/2)(2-1/2)\ldots(5-1/2)}=$$
$$=\frac{-\sqrt{\pi}}{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(5/2)\cdot(7/2)\cdot(9/2)}=\frac{32\sqrt{\pi}}{945}.$$

132. Calcular $\Gamma(5/2)$.

Resolución. Haciendo $m=2$ en la fórmula (6), nos queda

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4!\,\Gamma(1/2)}{2!\cdot2^4}=\frac{24\sqrt{\pi}}{2\cdot16}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

133. Calcular $\Gamma(-4/3)$.

Resolución. Utilizando la relación $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$, tenemos

$$\Gamma\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{\Gamma(-4/3+1)}{-4/3}=\frac{\Gamma(-1/3)}{-4/3}=\frac{\Gamma(-1/3+1)}{(-4/3)\cdot(-1/3)}=$$
$$=\frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{4}\cdot\frac{\Gamma(5/3)}{2/3}=\frac{27}{8}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right).$$

De la tabla *I* (pág. 448) hallamos $\Gamma(5/3)=0{,}9033$; por consiguiente, $\Gamma(-4/3)=(27/8)\cdot0{,}9033=3{,}0486$.

134. Calcular: 1) $(-1/2)!$; 2) $(1/2)!$; 3) $(3/2)!$; 4) $(0{,}21)!$.

Resolución. Por la formula (4) determinamos:

1) $(-1/2)! = \Gamma(-1/2+1) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = 1{,}772$;

2) $(1/2)! = \Gamma(1/2+1) = \Gamma(3/2) = (1/2)\,\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 = 0{,}886$;

3) $(3/2)! = \Gamma(3/2+1) = (3/2)\,\Gamma(3/2) = (3/2)\cdot(1/2)\,\Gamma(1/2) = 3\sqrt{\pi}/4 = 1{,}329$;

4) $(0{,}21)! = \Gamma(0{,}21+1) = \Gamma(1{,}21) = 0{,}9156$ (de la tabla 1).

135. Calcular $\Gamma(5/3)\cdot\Gamma(-5/3)$.

Resolución. Encontramos

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\Gamma(-2/3)}{-5/3}=\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\Gamma(1/3)}{(-5/3)(-2/3)}=$$
$$=\frac{3}{5}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

Puesto que por la fórmula de complemento $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/3)}=$ $=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, entonces

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{5}.$$

136. Mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)=\frac{\pi}{\cos p\pi}$.

Resolución. Haciendo en la fórmula (7) $p=\omega+1/2$, obtenemos

$$\Gamma\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left[1-\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/2+\omega\pi)},$$

o bien

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)=\frac{\pi}{\cos\omega\pi}.$$

137. $\Gamma(0,8)$. **138.** $\Gamma(-2{,}1)$. **139.** $\Gamma(3{,}2)$. **140.** $\Gamma(7/2)$.
141. $(-1/4)!$. **142.** $(1/3)!$. **143.** $(-2)!$.
144. $\Gamma(7/3)\cdot\Gamma(/7/3)$. **145.** $\Gamma(10/3)\cdot\Gamma(-10/3)$.
146. $\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(-1/4)$. **147.** $\Gamma(5/4)\cdot\Gamma(-5/4)$.

148. Mostrar que $\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^m}{(2m-1)!!}\sqrt{\pi}$.

149. Mostrar que $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=(-1)^m\pi$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$.

2. Función beta. Se llama *función beta* (*o integral de Euler de primer género*) a la integral

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (1)$$

La integral (1) es la función de dos parámetros p y q que converge cuando $p > 0$, $q > 0$.

La función B es simétrica con respecto a los parámetros, o sea, $B(p, q) = B(q, p)$.

Si se hace el cambio de la variable de integración, haciendo $x = \operatorname{sen}^2 t$, $dx = 2 \operatorname{sen} t \cos t \, dt$, con ello t varía de 0 a $\pi/2$, entonces la fórmula (1) tomará la forma

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cos^{2q-1} t \, dt,$$

o bien

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \, (m > 0, \, n > 0). \tag{2}$$

A las formas (1) y (2) se reducen muchas integrales que se resuelven en problemas prácticos.

Para calcular los valores de la función beta se usa la siguiente dependencia entre la función beta y la función gamma:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{3}$$

Si $q = 1 - p$, entonces $B(p, 1-p) = \dfrac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \, (0 < p < 1)$.

Utilizando la función beta es fácil determinar el valor de $\Gamma(1/2)$. Sea $p = q = 1/2$; entonces $B(1/2, 1/2) = \dfrac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1)}$. Como $B(1/2, 1/2) = B(1/2, 1 - 1/2) = \pi/\operatorname{sen}(\pi/2) = \pi$ y $\Gamma(1) = 1$, entonces $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

150. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \cos^8 x \, dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula (2) para $m = 6$ y $n = 8$, obtenemos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \cos^8 x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(7/2)\,\Gamma(9/2)}{\Gamma(8)} = \frac{5\pi}{2^{12}}$$

(los valores de $\Gamma(7/2)$ y $\Gamma(9/2)$ están calculados por la fórmula (6) del punto 1 para $m = 3$ y $m = 4$ y $\Gamma(8) = 7!$).

151. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3 - \cos t}}$.

Resolución. Hacemos $\cos t = 1 - 2\sqrt{u}$; entonces $dt = \dfrac{du}{2\sqrt[4]{u^3}\sqrt{1-\sqrt{u}}}$,

$\sqrt{3-\cos t}=\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{u}}$, con ello t varía de 0 a 1. Entonces obtenemos

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 u^{-3/4}(1-u)^{-1/2}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{[\Gamma(1/4)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}$$

Como $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/4)}=\pi\sqrt{2}$ y $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=$ $=\frac{\Gamma(1{,}25)}{1/4}=4\cdot 0{,}9064=3{,}6256$, entonces

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(3{,}6256)^2}{\pi\sqrt{2}}=\frac{(3{,}6256)^2}{4\sqrt{\pi}}=1{,}8545.$$

152. Calcular $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}$.

Resolución. Reescribimos la integral dada en la forma $\int_0^1(1-x^{2/5})^{-1/2}\,dx$. Utilizamos la sustitución $x^{2/5}=t$; entonces $x=t^{5/2}$, $dx=(5/2)\,t^{3/2}\,dt$ y, por consiguiente,

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}=\frac{5}{2}\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{5}{2}B\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)}=\frac{15\pi}{16}.$$

153. Demostrar que si $I_1=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ e $I_2=\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, entonces $I_1I_2=\frac{\pi}{4}$.

Resolución. Hacemos $x^4=t$, de donde $dx=(1/4)\,t^{1/4-1}\,dt$. Entonces obtenemos

$$I_1=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)};$$

$$I_2=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{3/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(3/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)}=\frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)},$$

puesto que $\Gamma(5/4) = (1/4)\,\Gamma(1/4)$. Por consiguiente,

$$I_1 I_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(3/4)\cdot[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)} = \frac{1}{4}(\sqrt{\pi})^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Calcular:

154. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\,dx$. **155.** $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

156. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^5 4x \cos^4 2x\,dx$.

157. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{10} x \cos^4 x\,dx$.

158. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}}$, $a>0$.

Indicación: se sustituye $x^a = t$.

159. $\int\limits_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$.

Indicación: se sustituye $x^2/a^2 = t$.

160. $\int\limits_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}\,dx$.

161. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b \operatorname{sen}(a\pi/b)}$.

Indicación: se sustituye $(1+x^b)/x^b = 1/y$.

162. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}$, $0<a<1$.

Indicación: se sustituye $x = u/(1-u)$.

163. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}}$. **164.** $\int\limits_0^\pi \operatorname{sen}^6 x \cos^2 (x/2)\,dx$.

165. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

166. $\int\limits_0^1 x^3(1-\sqrt[3]{x})^2\,dx$.

Indicación: se sustituye $x=t^3$.

167. $\int\limits_0^1 x^{n-1}(1-x^h)^{m-1}\,dx \quad (n>0,\ m>0).$

Indicación: se sustituye $x^h=t$.

168. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$

Indicación: se sustituye $\operatorname{tg} x=u^2$.

169. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$. **170.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

171. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2n-1} x\,dx \quad (0<n<1).$

172. Expresar $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$ mediante la función gamma

Capítulo II. Integrales curvilíneas e integrales de superficie

§ 1. Integrales curvilíneas por la longitud de un arco y por las coordenadas

1. Integral curvilínea de longitud de un arco (integral curvilínea de género I). Sea que la función $f(x, y)$ está definida y es continua en los puntos del arco AB de una curva lisa K con ecuación $y = \varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Dividimos arbitrariamente el arco AB en n arcos elementales por los puntos $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$; sea Δs_k la longitud del arco $A_{k-1}A_k$. Escogemos en cada arco elemental un punto arbitrario $M_k(\xi_k; \eta_k)$ y multiplicamos el valor de la función $f(\xi_k, \eta_k)$ en este punto por la longitud Δs_k del arco respectivo.

Se llama *suma integral* para la función $f(x, y)$ *de longitud del arco* AB a la suma que tiene la forma $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k$.

Se denomina *integral curvilínea de longitud del arco* AB de la función $f(x, y)$ (o integral curvilínea de género I) al límite de la suma integral a condición de que $\max \Delta s_k \to 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k$$

(ds es la diferencial del arco).

La integral curvilínea de género I se determina por la fórmula

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds = \int\limits_{a}^{b} f[x, \varphi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Si la curva K está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, entonces

$$\int\limits_{K} f(x, y)\,ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

Análogamente se determina y se calcula la integral curvilínea de género I de la función de tres variables $f(x, y, z)$ de una curva espacial. Si la curva espacial está definida por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) entonces

$$\int_K f(x, y, z)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Si $f(x, y) > 0$, entonces la integral curvilínea de género I $\int_K f(x, y)\,ds$ no es más que la *masa de la curva* K que tiene la densidad variable lineal $\gamma = f(x, y)$ (interpretación física).

Propiedades principales de una integral curvilínea de género I

1ª. *Una integral curvilínea de género* I *no depende del sentido del camino de integración*

$$\int_{AB} f(x, y)\,ds = \int_{BA} f(x, y)\,ds.$$

2ª. $\int_K [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\,ds = \int_K f_1(x, y)\,ds \pm \int_K f_2(x, y)\,ds.$

3ª. $\int_K cf(x, y)\,ds = c\int_K f(x, y)\,ds$, donde $c = \text{const}$

4ª. *Si el contorno de integración K está dividido en dos partes K_1 y K_2, entonces*

$$\int_K f(x, y)\,ds = \int_{K_1} f(x, y)\,ds + \int_{K_2} f(x, y)\,ds.$$

2. Integral curvilínea de coordenadas (integral curvilínea de género II). Sean las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ continuas en los puntos del arco AB de una curva lisa K que tiene la ecuación $y = \varphi(x)$ ($a \leqslant x \leqslant b$).

Se llama *suma integral* para las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ *en las coordenadas* a la suma que tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k],$$

donde Δx_k y Δy_k son las proyecciones del arco elemental sobre los ejes Ox y Oy.

Se denomina *integral curvilínea por los coordenadas* (o *integral curvilínea de género* II) de la expresión $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ en el arco orientado AB al límite de la suma integral a condición de que $\max \Delta x_k \to 0$ y $\max \Delta y_k \to 0$:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k].$$

La integral curvilínea de género II es el *trabajo* realizado por la fuerza variable $F = P(x, y)\, i + Q(x, y)\, j$ sobre el camino curvilíneo $\breve{AB}$ (interpretación mecánica).

Propiedades principales de la integral curvilínea de género II

1ª. ***La integral curvilínea de género* II *cambia su signo por el opuesto, al invertir el camino de integración:***

$$\int_{\breve{BA}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy.$$

2ª. $\displaystyle\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\breve{AB}} P\,dx + \int_{\breve{AB}} Q\,dy.$

Las demás propiedades son análogas a las de las integrales de género I. La integral curvilínea de género II se calcula por la fórmula

$$\int_K P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_a^b \{P[x, \varphi(x)] + \varphi'(x)\, Q[x, \varphi(x)]\}\,dx.$$

Si la curva K está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, donde $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, entonces

$$\int_K P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

La fórmula análoga tiene lugar para calcular la integral curvilínea de segundo género referente a la curva espacial K: si la curva está definida por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, donde $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, entonces

$$\int_K P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)\, z(t)]\,y'(t) +$$

$$+ R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

173. Calcular $\displaystyle\int_K (x - y)\,ds$ donde K es el segmento de la recta desde $A(0; 0)$ hasta $B(4; 3)$.

Resolución. La ecuación de la recta AB tiene la forma $y = (3/4)\,x$. Determinamos $y' = 3/4$ y, por consiguiente,

$$\int_K (x-y)\,ds = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1 + \frac{9}{16}}\,dx = \frac{5}{16}\int_0^4 x\,dx = \frac{5}{32}\,x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

174. Calcular $\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx$ si $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\operatorname{sen} t}$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$.

Resolución. Determinemos $dx=-\frac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{\cos t}}\,dt$, $dy=\frac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t}}\,dt$. Entonces

$$\int\limits_K x^2y\,dy-y^2x\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos t\cdot\sqrt{\operatorname{sen} t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t}}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sen} t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt=\frac{\pi}{4}.$$

175. Hallar la masa M del arco de la curva $x=t$, $y=t^2/2$, $z=t^3/3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ cuya densidad lineal varía según la ley $\gamma=\sqrt{2y}$.

Resolución. Tenemos

$$M=\int\limits_K\sqrt{2y}\,ds=\int\limits_0^1\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}t^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

176. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la cicloide $x=t-\operatorname{sen} t$, $y=1-\cos t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

Resolución. Las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de la curva K se calculan por las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int\limits_K x\,ds,\qquad \bar{y}=\frac{1}{s}\int\limits_K y\,ds,$$

donde s es la longitud del arco. Tenemos

$$s=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=4.$$

Entonces

$$\bar{x}=\frac{1}{4}\int_K x\,ds=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(t-\operatorname{sen} t)\,2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen} t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}+4\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}\int_K y\,ds=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\,2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{4}{3}.$$

Calcular las integrales curvilíneas:

177. $\int_{AB}(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$ si el camino desde A (1; 1) hasta B (3; 4) es el segmento de una recta.

178. $\int_K (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$ si K es la línea quebrada OAB donde O (0; 0), A (2; 0), B (4; 2).

179. $\int_{AB}\frac{y\,ds}{\sqrt{x}}$ si AB es el arco de la parábola semicúbica $y^2=(4/9)\,x^3$ desde A $(3;\ 2\sqrt{3})$ hasta B $(8;\ 32\sqrt{2/3})$.

180. $\int_{AB} y\,dx-(y+x^2)\,dy$ si K es el arco de la parábola $y=2x-x^2$, dispuesto sobre el eje Ox y recorrido en el sentido de las agujas del reloj.

181. $\int_K y\,dx+2x\,dy$ si K es el contorno del rombo, recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj, cuyos lados están sobre las rectas $x/3+y/2=\Gamma 1$, $x/3-y/2=\pm 1$.

182. $\int_K 2x\,dy-3y\,dx$ si K es el contorno del triángulo que tiene por vértices A (1; 2), B (3; 1), C (2; 5), recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

183. $\int_K \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$ si K es el cuadrante I de la circunferencia $x=r\cos t$, $y=r\operatorname{sen} t$, recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

184. $\int\limits_K x^2y\,dx + x^3\,dy$ si K es el contorno limitado por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$ y recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

185. Hallar la masa del arco de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ si su densidad lineal en el punto $(x;\ y)$ es igual a y.

186. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de la curva $y = \operatorname{ch} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \ln 2)$.

187. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ $(-\infty \leqslant t \leqslant 0)$.

188. Calcular $\int\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ donde K es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$

189. Calcular $\int\limits_K \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$ donde K es la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$.

190. Hallar la masa de la primera espira de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$ si la densidad en cada punto es igual al radio vector de este punto.

191. Calcular $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$ donde OA es un cuadrante de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$, recorrido en el sentido de crecimento del parámetro t.

§ 2. Independencia de una integral curvilínea de género II del contorno de integración. Determinación de una función por su diferencial total

Sean las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ continuas al igual que sus derivadas parciales de primer orden en una región simplemente conexa D, y el contorno K, que se encuentra por completo en esta región.

Entonces la *condición necesaria y suficiente de independencia de la integral curvilínea* $\int\limits_K P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ *con respecto al contorno de integración es el cumplimiento en la región D de la identidad*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Al observar las condiciones indicadas la *integral curvilínea referente a cualquier contorno cerrado C contenida en la región D es igual a cero:*

$$\oint\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Para calcular la integral

$$\int_{(x_0;\,y_0)}^{(x_1;\,y_1)} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy$$

que no depende del contorno de integración (o sea, la condición $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ está cumplida) en calidad de la vía más ventajosa de integración conviene elegir la línea quebrada que une los puntos $(x_0;\ y_0)$ y $(x_1;\ y_1)$ cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy.

En las condiciones mencionadas la expresión subintegral $P(x,\ y)\,dx+$ $+Q(x,\ y)\,dy$ es la *diferencial total* de cierta función unívoca $U=U(x,\ y)$, o sea,

$$dU(x,\ y)=P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy.$$

La función $U(x,\ y)$ (primitiva) se puede hallar calculando la integral curvilínea por la línea quebrada A_0A_1B donde $A_0(x_0;\ y_0)$ es un punto fijo arbitrario, $B(x;\ y)$ es un punto variable y el punto A_1 tiene las coordenadas x e y_0. Entonces, a lo largo de A_0A_1 tenemos $y=y_0$ y $dy=0$ y a lo largo de A_1B, $x=\text{const}$, $dx=0$.

Como resultado obtenemos la fórmula siguiente

$$U(x,\ y)=\int_{x_0}^{x} P(x,\ y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,\ y)\,dy+C.$$

Análogamente, integrando en la línea quebrada A_0A_2B, donde $A_2(x_0;\ y)$, nos queda

$$U(x,\ y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy+\int_{x^0}^{x} P(x,\ y)\,dx+C.$$

192. Calcular $I=\int_{(1;\,1)}^{(2;\,3)}(x+3y)\,dx+(y+3x)\,dy.$

Resolución. La integral dada no depende del conturno de integración, puesto que

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x+3y)=3;\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y+3x)=3,$$

o sea, $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$ (sobre todo el plano xOy).

Escogemos como camino de integración la línea quebrada cuyos lados son paralelos a los ejes de las coordenadas. Tenemos en el primer tramo $y=1$, $dy=0$, $1\leqslant x\leqslant 2$, en el segundo tramo $x=2$, $dx=0$, $1\leqslant y\leqslant 3$. Por consiguiente,

$$I=\int_1^2(x+3)\,dx+\int_1^3(y+6)\,dy=\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_1^2+\left[\frac{y^2}{2}+6y\right]_1^3=$$

$$=2+6-\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+18-\frac{1}{2}-6=20\,\frac{1}{2}.$$

193. Hallar la función primitiva U si

$$dU = [y + \ln(x+1)]\, dx + (x + 1 - e^y)\, dy.$$

Resolución. Tenemos $P = y + \ln(x+1)$; $Q = x + 1 - e^y$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Sea $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y de contorno K sirve la quebrada OMN (fig. 20). Entonces

$$U(x, y) = \int_0^x \ln(x+1)\, dx + \int_0^y (x + 1 - e^y)\, dy =$$

$$= [x \ln(x+1) - x + \ln(x+1)]_0^x + [xy + y - e^y]_0^y =$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x + xy + y - e^y + 1 + C.$$

194. Hallar $U(x, y)$ si

$$dU = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy.$$

Resolución. Tenemos

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv -\frac{1}{y^2} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Aquí no se puede tomar el origen de coordenadas en calidad de punto $(x_0; y_0)$, ya que para $x = 0$ e $y = 0$ las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ no están definidas. Por eso, en calidad de punto $(x_0; y_0)$ tomemos, por ejemplo, $A_0(1, 1)$. Entonces

$$U(x, y) = \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) \times$$

$$\times dy = \ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1 + C.$$

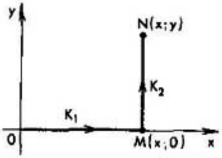

Fig. 20

Hallar la función primitiva $U(x, y)$ por su diferencial total.

195. $dU = [e^{x+y} + \cos(x - y)]\, dx + [e^{x+y} - \cos(x - y) + 2]\, dy$:

196. $dU = (1 - e^{x-y} + \cos x)\, dx + (e^{x-y} + \cos y)\, dy$.

197. $dU = (x^2 - 2xy^2 + 3)\, dx + (y^2 - 2x^2y + 3)\, dy$.

198. $dU = (2x - 3xy^2 + 2y)\, dx + (2x - 3x^2y + 2y)\, dy$.

199. $dU = (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y)\, dx + (x \operatorname{sh} y + 1)\, dy$.

200. $dU = (\operatorname{arcsen} x - x \ln y)\, dx - \left(\operatorname{arcsen} y + \frac{x^2}{2y}\right) dy$.

201. Calcular $\int\limits_{(0;\,0)}^{(\pi,\,\pi)} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$ por diversos contornos que unen los puntos $O(0; 0)$ y $M(\pi; \pi)$: 1) por la recta OM; 2) por la curva $y = x + \operatorname{sen} x$; 3) por la línea quebrada OPM, donde $P(\pi; 0)$; 4) por la parábola $y = x^2/\pi$.

202. Calcular $\oint\limits_K x\,dy + y\,dx$ por diversos contornos cerrados: 1) por la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; 2) por el contorno limitado por el arco de la parábola $y = x^2$ y el segmento $y = 1$.

§ 3. Fórmula de Green

Si C es la frontera de la región D y las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son continuas en la región cerrada D (incluyendo la frontera C), entonces es válida la *fórmula de Green*

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

además el recorrido del contorno C se elige de modo que la región D quede a la izquierda.

203. Aplicando la fórmula de Green, calcular $I = 2\oint\limits_C (x^2 + y^2) \times$ $\times\, dx + (x + y^2)\,dy$, si C es el contorno del triángulo con vértices $L(1; 1)$, $M(2; 2)$, $N(1; 3)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Comprobar el resultado por medio de la integración

Resolución. Aquí $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, $q(x, y) = (x + y)^2$. Hallamos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x + y) - 4y = 2(x - y)$. De este modo,

$$I = \oint 2\,(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy = \iint\limits_D 2(x - y)\,dx\,dy,$$

donde la región D es el triángulo LMN. La ecuación de la recta $LM: y = x$, la de $MN: y = -x + 4$. Calculamos la integral doble por la región dada:

$$I = 2\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4-x} (x - y)\,dy = 2\int\limits_1^2 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_x^{4-x} dx =$$

$$= 2\int\limits_1^2 \left[x(4 - x) - \frac{1}{2}(4 - x)^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2\right] dx =$$

$$= 4\int\limits_1^2 (4x - x^2 - 4)\,dx = 4\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Calculamos ahora inmediatamente la integral curvilínea por el contorno C compuesto por los lados LM, MN, NL:

$$I = \int\limits_{LM} 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy + \int\limits_{MN} 2(x^2 + y^2)\,dx +$$

$$+ (x + y)^2\,dy + \int\limits_{NL} 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy.$$

La ecuación $LM: y = xy$, por consiguiente, $dy = dx$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.
La ecuación $MN: y = -x + 4$, por lo tanto, $dy = -dx$, $2 \geqslant y \geqslant 1$.

La ecuación $ML: x = 1$, de suerte que $dx = 0$, $3 \geqslant y \geqslant 1$. De este modo,

$$I = \int_1^2 [2(x^2+x^2)\,dx + (x+x)^2\,dx] + \int_2^1 \{2[x^2+(4-x)^2]\,dx +$$
$$+ (x-x+4)^2(-dx)\} + \int_3^1 (1+y)^2\,dy = 8\int_1^2 x^2\,dx +$$
$$+ \int_2^1 (4x^2-16x+16)\,dx + \int_3^1 (1+y)^2\,dy =$$
$$= \left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - 16x\right]_1^2 + \frac{1}{3}(1+y)^3\Big|_3^1 = -\frac{4}{3}.$$

204. Aplicando la fórmula de Green, calcular $\oint\limits_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=R^2$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Resolución. Aquí $P(x, y) = -x^2y$, $Q(x, y) = xy^2$. Entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2+y^2$. Por consiguiente,

$$I = \oint\limits_C -x^2y\,dx + x^2y\,dy = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Introducimos las coordenadas polares: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$; de suerte que

$$I = \iint\limits_D \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3\,d\rho = \frac{1}{4}R^4\cdot\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

205. Con ayuda de la fórmula de Green transformar la integral curvilínea $I = \oint\limits_C [x + \ln(x^2+y^2)]\,dx + y\ln(x^2-y^2)\,dy$, donde el contorno C limita la región D.

206. Aplicando la fórmula de Green, calcular $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\,[xy + \ln(x + (\sqrt{x^2+y^2})]\,dy$, donde C es el contorno del rectángulo $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

§ 4. Cálculo de un área

El área S de la figura limitada por un contorno cerrado simple C se determina por la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

El contorno de integración es recorrido de modo que la región limitada por el mismo quede a la izquierda (sentido positivo).

207. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ (se tiene en cuenta el área adyacente al origen de las coordenadas; fig. 21).

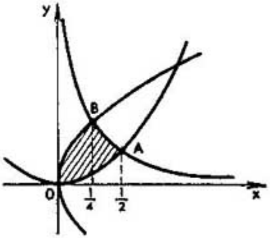

Fig. 21

Resolución. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones de las curvas, hallamos A (1/2; 1/4), B (1/4; 1/2). Por consiguiente,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{OA} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{AB} x\,dy-y\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{BO} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1/2} x^2\,dx-\frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{1/4}\frac{dx}{x}-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{1/4}^{0}\sqrt{x}\,dx=\frac{1+3\ln 2}{24}\approx 0{,}13 \text{ (unidades cuadradas).}$$

208. Calcular el área limitada por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$, construyendo previamente la curva.

Resolución. Para calcular el área utilizamos la fórmula

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{C} x\,dy-y\,dx, \text{ donde } dy=3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t\,dt,\ dx=$$

$$=-3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t\,dt,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \text{ Por consiguiente,}$$

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t+3a^2\,\mathrm{sen}^4 t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{sen}^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3a^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{sen}^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{16}a^2\left[t-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4t\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

209. Calcular el área limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$.

210. Calcular el área limitada por la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

211. Calcular el área del cuadrilátero que tiene por vértices A (6; 1), B (4; 5), C (1; 6), D (—1; 1).

212. Calcular el área de la figura limitada por el contorno $OABCO$ si A (1; 3), B (0; 4), C (—1; 2), O (0; 0), OA, BC, CO, son los segmentos de las rectas y AB es el arco de la parábola $y = 4 - x^2$.

213. Calcular el área limitada por la cardioide $x = 2r \cos t - r \cos 2t$, $y = 2r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 2t$.

§ 5 Integrales de superficie

Sean $F(x, y, z)$ una función continua y $z = f(x, y)$ una superficie lisa S, donde $f(x, y)$ está definida en cierta región D del plano xOy. Se llama *integral de superficie de género* I al límite de la suma integral a condición de que $\max d_k \to 0$:

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k = \iint_S F(x, y, z)\, dS,$$

donde ΔS_k es el área del k-ésimo elemento de la superficie S, el punto (ξ_k; η_k; ζ_k) pertenece a este elemento, d_k es el diámetro de este elemento, $F(x, y, z)$ está definida en cada punto de la superficie S.

El valor de esta integral no depende de la selección del lado de la superficie S en la cual se efectúa la integración.

Si la proyección D de la superficie S sobre el plano xOy es unívoca, la respectiva *integral de superficie de género* I *se calcula por la fórmula*

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy .$$

Si $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ son las funciones continuas y S^+ es el lado (cara) de la superficie lisa S caracterizado por la dirección de la normal $\mathbf{n}$ ($\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$), entonces la respectiva *integral de superficie de género* II *se expresa así:*

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma)\, dS.$$

Al pasar al otro lado (cara) S^- de la superficie esta integral cambia su signo por el opuesto.

Si la superficie S está definida por la ecuación implícita $\Phi(x, y, z) = 0$, entonces los cosenos directores de la normal a esta superficie se determinan por las fórmulas:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

donde el signo delante del radical debe concordar con la cara de la superficie.

Los *momentos de inercia de una parte de la superficie* con respecto a los ejes de las coordenadas se expresan por las integrales de superficie:

$$I_{Ox}=\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dS,\quad I_{Oy}=\iint\limits_S (x^2+z^2)\,dS,$$

$$I_{Oz}=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS.$$

Las *coordenadas del centro de gravedad de una parte de la superficie* se pueden determinar por las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_S x\,dS,\quad \bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_S y\,dS,\quad \bar{z}=\frac{1}{S}\iint\limits_S z\,dS,$$

donde S es el área de la parte dada de la superficie.

214. Calcular $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, donde S es la parte de la superficie cónica $z^2=x^2+y^2$, comprendida entre los planos $z=0$ y $z=1$.

Resolución. Tenemos

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$$
$$=\sqrt{2}\cdot dx\,dy.$$

Entonces la integral buscada se transforma en la integral doble:

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy\ .$$

La región de integración D es el círculo $x^2+y^2\leqslant 1$, por eso

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=4\sqrt{2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^1 \rho^3\,d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

215. Hallar el momento de inercia de la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ con respecto al eje Oz.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy = \frac{a\, dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$I_{Oz} = \iint_S (x^2+y^2)\, dS = \iint_D (x^2+y^2)\cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy.$$

De región de integración sirve la proyección de la semiesfera sobre el plano xOy, o sea, el círculo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ y por eso, pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$I_{Oz} = \iint_D \rho^2 \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\, \rho\, d\rho\, d\theta = 4a \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

(la integral interior se puede calcular con ayuda de la sustitución $\rho = a$ sen t).

216. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del plano $z = x$ limitado por los planos $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$ (fig. 22).

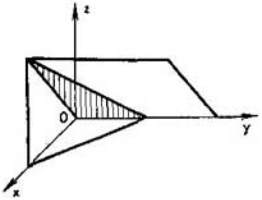

Fig. 22

Resolución. Determinamos el área de la parte indicada del plano $z=x$. Tenemos $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$; por consiguiente

$$S = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint_S x\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}\sqrt{2}\,dy=2\int_0^1 x(1-x)\,dx=$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\ ;\ \bar{y}=\frac{1}{S}\iint_S y\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{2}\,y\,dy=$$

$$=\int_0^1 (1-x)^2\,dx=-\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ ;$$

$$\bar{z}=\frac{1}{S}\iint_S z\,dS=\frac{1}{S}\iint_S x\,\partial S=\frac{1}{3}$$

(se ha utilizado la ecuación del plano $z=x$).

217. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la parte de la superficie $z=2-(x^2+y^2)/2$, situada sobre el plano xOy.

218. Hallar el momento de inercia del paraboloide $z=(x^2+y^2)/2$ con respecto al eje Oz para $0\leqslant z\leqslant 1$.

219. Calcular $\iint_S xyz\,dS$, donde S es la parte de la superficie $z=x^2+y^2$, situada entre los planos $z=0$ y $z=1$.

§ 6. Fórmulas de Stokes y de Ostrogradski-Gauss. Elementos de la teoría del campo

Si las funciones $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden sobre la superficie S y C es el contorno cerrado que limita la superficie S, entonces es válida la *fórmula de Stokes*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie S. La dirección de la normal se determina de modo que por parte de la normal el recorrido del contorno C parezca ocurrir en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Si las funciones $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ son continuas al igual que sus derivadas parciales de primer orden en la región cerrada T del espacio limitada por una superficie lisa cerrada S, entonces es válida la *fórmula de Ostrogradski—Gauss*

$$\oiint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

Si un vector variable $\mathbf{F}$ es la función vectorial de un punto del espacio: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, donde $M(x;\ y;\ z)$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces este vector determina el campo vectorial. En la forma de coordenadas

$$\mathbf{F} = P(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + Q(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + R(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k},$$

donde $P = P(x,\ y,\ z)$, $Q = Q(x,\ y,\ z)$, $R = R(x,\ y,\ z)$ son las proyecciones del vector $\mathbf{F}$ sobre los ejes de las coordenadas.

Se llama *divergencia* del campo vectorial $\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ al escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

Se denomina *rotor* del campo vectorial $\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ al vector

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Se llama *flujo* del campo vectorial $\mathbf{F}(M)$, a través de la superficie S en la dirección determinada por el vector unitario de la normal $\mathbf{n} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\beta\cdot\mathbf{j} + \cos\gamma\cdot\mathbf{k}$ a la superficie S, a la integral de superficie

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_S F_n\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

La fórmula de Ostrogradski—Gauss en la forma vectorial tiene el aspecto

$$\oiint\limits_S F_n\,dS = \iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV,$$

o sea, *la integral de divergencia del campo vectorial* $\mathbf{F}$, *extendida sobre cierto volumen* T, *es igual al flujo del vector a través de la superficie* S *que limita el volumen dado.*

Se denomina *integral lineal* del vector $\mathbf{F}$ por la curva K a la integral curvilínea

$$\int\limits_K \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int\limits_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

que no es más que el *trabajo* del campo vectorial a lo largo de la curva K. Si el contorno C es cerrado, entonces la integral lineal

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

se denomina *circulación* del campo vectorial $\mathbf{F}(M)$ a lo largo del contorno C.

La *fórmula de Stokes en la forma vectorial* tiene el aspecto

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\,dS,$$

o sea, *la circulación del vector a lo largo del contorno de cierta superficie es igual al flujo del rotor a través de esta superficie.*

220. Hallar la integral $\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$ extendida sobre la superficie de cualquier cuerpo.

Resolución. Por la fórmula de Ostrogradski—Gauss tenemos

$$\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial (x)}{\partial x} + \frac{\partial (y)}{\partial y} + \frac{\partial (z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 3\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = 3V,$$

donde V es el volumen del cuerpo.

221. Aplicando la fórmula de Ostrogradski-Gauss, transformar la integral de superficie

$$I = \oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz + \frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$$

en integral de volumen.

Resolución. La integral dada se puede escribir así:

$$I = \oiint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS$$

y la última integral según la fórmula de Ostrogradski—Gauss es igual a

$$\iiint\limits_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\,\partial y\,dz.$$

Por consiguiente,

$$I = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz$$

222. Aplicando la fórmula de Stokes, hallar $I = \oint\limits_C x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

Resolución. Según la fórmula de Stokes tenemos

$$I=\oint_C x^2y^3\,dx+dy+z\,dz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

donde $P=x^2y^3$, $Q=1$, $R=z$. Por lo tanto, en el segundo miembro obtendremos $-\iint_S 3x^2y^2\cos\gamma\,dS$, donde $dS\cos\gamma=dx\,dy$. Ahora bien,

$$I=-3\iint_D x^2y^2\,dx\,dy.$$

Suponiendo $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$, obtendremos

$$I=-3\iint_D \rho^5\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta=-12\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^r\rho^5\,d\rho=$$

$$=-2r^6\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{r^6}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{r^6}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos4\theta)\,d\theta=-\frac{r^6}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\theta\right]_0^{\pi/2}=-\frac{\pi r^6}{8}.$$

223. Hallar el flujo del radio vector **r** a través de la cara exterior de la superficie de un cilindro circular recto, si el origen de las coordenadas coincide con el centro de la base inferior del cilindro, R es el radio de la base del cilindro, h es su altura (fig. 23).

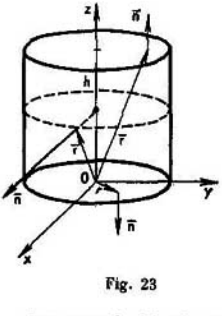

Fig. 23

Resolución. Para calcular el flujo del vector **r** a través de la cara exterior de la superficie del cilindro es necesario determinar el flujo de este vector a través de la base inferior, la supericie lateral y la base superior del cilindro.

Tenemos $Q_{\text{b. inf}}=\iint_S r_n\,dS$, pero la proyección del radio vector **r** sobre la normal exterior a la base del cilindro es igual a cero y, por eso, $Q_{\text{b. inf}}=0$.

La proyección del radio vector sobre la normal a la superficie lateral es igual al radio de la base del cilindro, o sea $r_n=R$; entonces $Q_{\text{s. lat}}=$
$=\iint_S R\,dS=R\cdot S_{\text{s. lat}}=2\pi R^2h.$

La proyección del radio vector sobre la normal a la base superior es igual a h, por consiguiente, $Q_{\text{b. sup}} = h \cdot \iint_S dS = h \cdot S_b = \pi R^2 h$.

De este modo, el flujo del vector **r** a través de la cara exterior de la superficie del cilindro es igual a

$$Q = 2\pi R^2 h + \pi R^2 h = 3\pi R^2 h.$$

224. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (2z - x)\,\mathbf{i} + (x + 2z)\,\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ a través del lado del triángulo S, recortado del plano $x + 4y + z - 4 = 0$, por los planos de las coordenadas en aquella dirección de la normal al plano que forma con el eje Oz un ángulo agudo.

Resolución. Tenemos

$$\Pi = \iint_S (2z - x)\,dy\,dz + (x + 2z)\,dz\,dx + 3z\,dx\,dy =$$

$$= \iint_S (2z + 4y + z - 4)\,dy\,dz + (x + 2z)\,dz\,dx + 3(4 - x - 4y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{4-4y} (3z + 4y - 4)\,dz + \int_0^4 dz \int_0^{4-z} (x + 2z)\,dx +$$

$$+ 3\int_0^4 dx \int_0^{1-x/4} (4 - x - 4y)\,dy = \int_0^1 \left[\frac{3}{2}\,16\,(1-y)^2 - 16\,(1-y)^2\right] dy +$$

$$+ \int_0^4 \left[\frac{1}{2}(4-z)^2 + 2z\,(4-z)\right] dz + 3\int_0^4 \left[\frac{1}{4}(4-x)^2 - \frac{(4-x)^2}{8}\right] dx = 42\frac{2}{3}.$$

225. Hallar la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = (x + 3y + 2z)\,\mathbf{i} + (2x + z)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}$ por el contorno del triángulo MNP, donde $M\,(2;\,0;\,0)$, $N\,(0;\,3;\,0)$, $P\,(0;\,0;\,1)$.

Resolución. Según la fórmula de Stokes $\oint_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\,dS$, donde

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + 3y + 2z & 2x + z & x - y \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial (x-y)}{\partial y} - \frac{\partial (2x+z)}{\partial z}\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial (x-y)}{\partial x} - \frac{\partial (x + 3y + 2z)}{\partial z}\right]\mathbf{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial (2x+z)}{\partial x} - \frac{\partial (x + 3y + 2z)}{\partial y}\right]\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Aquí C es el contorno del triángulo MNP para la orientación positiva. Este triángulo descansa en el plano $x/2 + y/3 + z/1 = 1$, o bien $3x + 2y + 6z - 6 = 0$. Por consiguiente,

$$\text{II} = \iint_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dS = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F})_x\, dy\, dz + (\operatorname{rot} \mathbf{F})_y\, dz\, dx +$$

$$+ (\operatorname{rot} \mathbf{F})_z\, dx\, dy = -2 \iint_{D_{yz}} dy\, dz + \iint_{D_{zx}} dz\, dx - \iint_{D_{xy}} dx\, dy =$$

$$= -2 \int_0^3 dy \int_0^{1-y/3} dz + \int_0^1 dz \int_0^{2-2z} dx - \int_0^2 dx \int_0^{3-3x/2} dy =$$

$$= -2 \left[y - \frac{y^2}{6} \right]_0^3 + [2z - z^2]_0^1 - \left[3x - \frac{3}{4} x^2 \right]_0^2 = -5.$$

226. Hallar la divergencia del campo vectorial $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

Resolución. Según la definición $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$, donde $A_x = x^2$, $A_y = y^2$, $A_z = z^2$. Por lo tanto, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 2(x+y+z)$.

227. Hallar la circulación del vector $\mathbf{A} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ por la circunferencia $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$ en el sentido positivo.

Resolución. Tenemos

$$\oint_C \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = \oint_C -\omega y\, dx + \omega x\, dy = \omega \int_0^{2\pi} (a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t)\, dt = 2\pi a^2 \omega.$$

228. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ a través del lado del triángulo S, recortado del plano $x + y + z - 1 = 0$ por los planos de las coordenadas.

229. Hallar la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - z)\mathbf{k}$ por el contorno del triángulo ABC, donde $A\,(0; 0; 0)$, $B\,(0; 1; 0)$, $C\,(0; 0; 1)$.

230. Mostrar que $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$, o sea, el rotor del gradiente de un escalar cualquiera es igual a cero.

Resolución. Puesto que las proyecciones del vector del gradiente son las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, entonces

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} \right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} \right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \right) = 0.$$

231. Aplicando la fórmula de Stokes, hallar la integral curvilínea $\oint_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

232. Hallar la integral $\iint_C (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,dS$ tomada en la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, donde α, β, γ son los ángulos de la normal exterior con los ejes de coordenadas.

233. Hallar $\iint_C [(z^2-y^2)\cos\alpha + (x^2-z^2)\cos\beta + (y^2-x^2)\cos\gamma]\,dS$, donde S es la cara exterior de la superficie de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$.

234. Calcular $\iint_C (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$, donde S es la cara exterior de la superficie del elipsoide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

235. Calcular $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior de la superficie del cilindro $x^2+y^2=a^2$ $(-h\leqslant x\leqslant h)$.

236. Hallar el flujo del vector $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ a través de la superficie lateral del cono $x^2+y^2\leqslant (R^2/h^2)\,z^2$, $0\leqslant z\leqslant h$.

237. Hallar la divergencia del gradiente de la función $u=e^{x+y+z}$.

238. Hallar div $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, donde $\mathbf{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$.

239. Hallar el flujo del radio vector $\mathbf{r}$ a través de la cara exterior de la superficie de un cono circular recto si h es la altura del cono y R, el radio de la base.

240. Hallar la circulación del vector $\mathbf{A}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ por la circunferencia $x^2+(y-1)^2=1$.

241. Hallar la circulación del vector $\mathbf{u}=(x+z)\,\mathbf{i}+(x-y)\,\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ por la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

242. Hallar rot $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

243. Hallar rot $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}$, donde $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

244. Mostrar que div $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}$ rot $\mathbf{a}-\mathbf{a}$ rot $\mathbf{b}$.

245. Mostrar que div $(f\mathbf{A})=f$ div $\mathbf{A}+\mathbf{A}$ grad f.

Capítulo III. Series

§ 1. Series numéricas

Sea $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, donde $u_n = f(n)$ es una sucesión numérica infinita. La expresión

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

se llama *serie numérica* infinita y los números $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ se dicen *términos* de la serie; $u_n = f(n)$ se denomina *término general*. Una serie se escribe frecuentemente en la forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

La suma de los primeros n términos de una serie numérica se designa por S_n y se llama *suma parcial n-ésima de la serie*:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Una serie se dice *convergente* si su suma parcial n-ésima S_n tiende, con un crecimiento ilimitado de n, a un límite finito, o sea, si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. El número S ha recibido el nombre de *suma* de la serie. Por el contrario, si la suma parcial n-ésima de una serie no tiende, cuando $n \to \infty$, a un límite finito, la serie se denomina *divergente*.

La serie

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (|q| < 1)$$

compuesta por los términos de una progresión geométrica decreciente cualquiera es convergente, siendo su suma $a/(1-q)$.

La serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

llamada *armónica*, diverge.

Enunciamos los teoremas principales sobre las series numéricas convergentes.

1. *Si converge la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

entonces converge también la serie

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots,$$

obtenida de la serie dada omitiendo los primeros m términos (esta última serie se denomina *m-ésimo resto* de la serie inicial); y viceversa, *de la convergencia del m-ésimo resto de la serie se desprende la convergencia de la serie dada.*

2. *Si converge la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

y su suma es el número S, *entonces converge también la serie*

$$au_1 + au_2 + au_3 + \ldots,$$

además , la suma de la última serie es igual a aS.

3. *Si convergen las series*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

que tienen las sumas S *y* σ, *respectivamente, entonces converge también la serie*

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots,$$

siendo la suma de esta última serie igual a $S + \sigma$.

4. *Si la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, *o sea, cuando* $n \to \infty$, *el límite del término general de la serie convergente es igual a cero* (*criterio necesario* de convergencia de una serie).

Por lo tanto, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, entonces la serie diverge.

Citamos los criterios más importantes de convergencia y divergencia de las series que tienen términos positivos.

Primer criterio de comparación. Sean dadas dos series con términos positivos:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

y

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$

además, cada término de la serie (1) *no supere el término respectivo de la serie* (2), *o sea,* $u_n \leqslant v_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Entonces si converge la serie* (2), *converge también la serie* (1); *si diverge la serie* (1), *diverge también la serie* (2).

Este criterio sigue en vigencia si las desigualdades $u_n < v_n$ se cumplen no para todos los n, sino comenzando de cierto número $n = N$.

Segundo criterio de comparación. Si existe un límite finito y distinto de cero $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) = k$, *entonces ambas series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *simultáneamente convergen o simultáneamente divergen.*

Criterio de Cauchy. Si para una serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$, *entonces esta serie converge cuando* $C < 1$ *y diverge cuando* $C > 1$.

Criterio de d'Alembert. Si para una serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

existe $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n) = D$, *esta serie converge cuando* $D < 1$ *y diverge cuando* $D > 1$.

Criterio integral. Si $f(x)$ para $x \geqslant 1$ es una función continua, positiva y monótona decreciente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, donde $u_n = f(n)$, converge o diverge en dependencia del hecho de que converja o diverja la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Examinemos ahora las series cuyos términos tienen signos distintos.

Se llama *serie alternada* a la que tiene la forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

donde $u_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Criterio de convergencia de una serie alternada (criterio de Leibniz). Una serie alternada converge si los valores absolutos de sus términos decrecen y el término general tiende a cero, o sea, si se cumplen dos condiciones siguientes: 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ y 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Tomamos la suma parcial n-ésima de una serie alternada para la cual se cumple el criterio de Leibniz:

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n.$$

Supongamos que R_n es el n-ésimo resto de la serie. Este resto se puede escribir como diferencia entre la suma de la serie S y la suma parcial n-ésima S_n, o sea, $R_n = S - S_n$. No es difícil ver que

$$R_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots).$$

El valor $|R_n|$ se estima con ayuda de la desigualdad $|R_n| < u_{n+1}$.

Vamos a exponer ahora algunas propiedades de las series de términos de signos cualesquiera (o sea, series alternadas y series con alteración arbitraria de los signos de sus términos).

La serie alternada

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

converge si converge la serie

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

En este caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se llama *absolutamente convergente*.

La serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se denomina *condicionalmente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absolutamente, entonces la serie obtenida después de cualquier reordenación de un conjunto infinito de sus términos converge absolutamente y tiene la misma suma que la serie inicial.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge condicionalmente, entonces al reordenar un conjunto infinito de sus términos la suma de la serie puede cambiar. En particular, reordenando (permutando) los términos de una serie condicionalmente convergente, se la puede transformar en serie divergente.

Si las series $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ y $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ convergen absolutamente y tienen por sumas respectivas S_1 y S_2, entonces converge también absolutamente la serie

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + v_1u_2) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots$$
$$\ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots.$$

Esta serie se llama *producto* de las series

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ y } v_1 + v_2 + v_3 + \ldots.$$

Su suma es igual a S_1S_2.

246. Se da el término general de la serie $u_n = \frac{n}{10^n+1}$. Escribir los primeros cuatro términos de la serie.

Resolución. Si $n = 1$, entonces $u_1 = 1/11$; si $n = 2$, entonces $u_2 = 2/101$; si $n = 3$, entonces $u_3 = 3/1001$; si $n_4 = 4$, entonces $u = 4/10001$; la serie se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots.$$

247. Hallar el término general de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots.$$

Resolución. Los numeradores consecutivos forman la progresión aritmética 1, 3, 5, 7, ...; el n-ésimo término de la progresión lo determinamos por la fórmula $a_n = a_1 + d(n-1)$. Aquí $a_1 = 1$, $d = 2$, por eso $a_n = 2n - 1$. Los denominadores consecutivos forman la progresión geométrica 2, 2^2, 2^3, 2^4, ...; el n-ésimo término de esta progresión es $b_n = 2^n$. Por consiguiente, el término general de la serie $u_n = (2n-1)/2^n$.

248. Hallar el término general de la serie

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots$$

Resolución. El exponente de la potencia de cada término coincide con el número de este término, por eso el exponente de la potencia del n-ésimo término es igual a n. Los numeradores de las fracciones 2/3, 3/7, 4/11, 5/15... forman una progresión aritmética con el primer término 2 y la diferencia igual a 1. Por eso el n-ésimo término es igual a $n + 1$. Los denominadores forman una progresión aritmética con el primer término igual a 3 y la diferencia igual a 4. Por consiguiente el n-ésimo denominador es igual a $4n - 1$. Por lo tanto, el término general de la serie es $u_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$.

249. Hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots$.

Resolución. Tenemos $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Puesto que

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

entonces

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right), \; u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right), \; u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right), \; u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \ldots$$

Por consiguiente,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, la serie converge y su suma es igual a $\frac{1}{2}$.

250. Hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots$.

Resolución. Representamos el término general de la serie $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ en forma de la suma de las fracciones elementales:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Multiplicando por el denominador del primer miembro, llegamos a la identidad

$$1 = A(n+1)(n+2)+B_n(n+2)+Cn(n+1).$$

Suponiendo sucesivamente $n=0$, -1, -2, encontramos: para $n=0$: $1=2A$; $A=1/2$; para $n=-1$; $1=-B$; $B=-1$; para $n=-2$: $1=2C$; $C=1/2$. De este modo,

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\text{, o sea, } u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

De aquí,

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right),\quad u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right),$$
$$u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right),\quad u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right),\ldots$$

y

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

De suerte que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1/4$; por consiguiente la serie converge y su suma es $1/4$.

251. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots\ .$$

Resolución. La serie está compuesta por los términos de la progresión geométrica infinita decreciente y por eso converge. Vamos a determinar la suma de la serie. Aquí $a = 2/3$, $q = 1/2$ (denominador de la progresión). Por consiguiente,

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{2/3}{1-1/2}=\frac{4}{3}.$$

252. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ldots$$

Resolución. La serie dada está obtenida por la omisión armónica de los primeros diez términos. Por consiguiente, ella diverge.

253. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots$$

Resolución. Encontramos el término general de la serie $u_n = n/(3n - 1)$. Como

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-1/n} = \frac{1}{3},$$

o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, la serie diverge (no se cumple la condición necesaria).

254. Investigar la convergencia de la serie

$$0{,}6 + 0{,}51 + 0{,}501 + 0{,}5001 + \ldots$$

Resolución. Aquí $u_n = 0{,}5 + (0{,}1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0{,}5 \neq 0$ y la serie diverge.

255. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

Resolución. Los términos de esta serie son menores que los términos respectivos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, o sea, de la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$. Pero la última serie converge como progresión geométrica infinita decreciente. Por lo tanto, converge también la serie dada.

256. Investigar la convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots \text{ si } p<1.$$

Resolución. Los términos de esta serie, comenzando del segundo, son mayores que los términos respectivos de la serie armónica. Por consiguiente, la serie diverge.

257. Investigar la convergencia de la serie que tiene el término general $u_n=\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

Resolución. Comparamos esta serie con la serie en la cual el término general $v_n = 1/2^n$ (o sea, con una progresión geométrica infinita decreciente). Apliquemos el segundo criterio de comparación de las series:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 - 3/2^n} = \frac{1}{4}.$$

Puesto que el límite es finito y distinto de cero y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, entonces converge también la serie dada.

258. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \ldots$$

Resolución. Aquí $u_n = 1/(3n - 1)$. Comparamos la serie dada con la serie armónica en la cual $v_n = 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, la serie dada diverge.

259. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots$$

Resolución. Tenemos $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Aquí es cómodo aplicar el criterio de Cauchy, puesto que $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$ y el límite de la última fracción se determina sencillamente:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2}.$$

Como $C = 1/2 < 1$, la serie converge.

260. Investigar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Resolución. Aplicamos también en este caso el criterio de Cauchy:

$$u_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e;$$

como $C > 1$, la serie converge.

261. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \ldots + \frac{2^n}{n^{10}} + \ldots$$

Resolución. Aplicamos el criterio de d'Alembert; tenemos $u_n = 2^n/n^{10}$, $u_{n+1} = 2^{n+1}/(n+1)^{10}$, $u_{n+1}/u_n = 2n^{10}/(n+1)^{10}$, es decir,

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} = 2.$$

Como $D > 1$, la serie diverge.

262. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\sqrt{3}} + \ldots$$

Resolución. Aquí $u_n = n/3^{n/2}$, $u_{n+1} = (n+1)/3^{(n+1)/2}$, $u_{n+1}/u_n = (n+1)/(n\sqrt{3})$; por eso

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ D < 1.$$

Por lo tanto, la serie converge.

263. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{3!} + \frac{10^3}{3!} + \ldots$$

Resolución. Tenemos $u_n = 10^n/n!$, $u_{n+1} = 10^{n+1}/(n+1)!$, $u_{n+1}/u_n = 10/(n+1)$. $D = \lim\limits_{n\to\infty} 10/(n+1) = 0$; $D < 1$, o sea, la serie converge.

264. Investigar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Resolución. Tenemos $u_n = 1/n^2$, $u_{n+1} = 1/(n+1)^2$, $u_{n+1}/u_n = n^2/(1+n^2) = 1/(1+1/n)^2$, $D = \lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n) = 1$. Puesto que $D = 1$, entonces con ayuda del criterio de d'Alembert no se logra resolver la cuestión acerca de la convergencia de la serie.

Aplicamos el criterio integral: $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, por consiguiente, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$. La integral converge (es una cantidad finita), por eso converge también la serie dada.

265. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \ldots$$

Resolución. Aplicamos el criterio integral:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)},$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^\infty \frac{\frac{dx}{x+1}}{\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^\infty = \infty.$$

La integral diverge, por eso diverge también la serie dada.

266. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\dots$$

Resolución. Apliquemos el criterio de Leibniz. Puesto que

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+1/2},\ \frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+1/3},\ \frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+1/4},\ \dots,$$

entonces

$$\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2+1}>\frac{3}{3^2+1}>\frac{4}{4^2+1}\dots$$

Por consiguiente, está cumplida la primera condición del criterio de Leibniz. Puesto que $u_n=n/(n^2+1)$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1/n}=0,$$

o sea, está cumplida la segunda condición. La serie converge.

267. Investigar la convergencia de la serie

$$1{,}1-1{,}01+1{,}001-1{,}0001+\dots.$$

Resolución. La primera condición del criterio de Leibniz se cumple: $1{,}1>1{,}01>1{,}001>1{,}0001\dots$; por otro lado, $u_n=1+\frac{1}{10^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1$. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$, no está cumplida la condición necesaria de convergencia de la serie. La serie diverge.

268. Investigar la convergencia de la serie

$$1-1+1-1+\dots.$$

Resolución. El término general de la serie no tiende a cero, por eso la serie diverge.

269. Investigar la convergencia de la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\dots.$$

Resolución. Compongamos la serie de valores absolutos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots.$$

Esta serie es una progresión geométrica infinita decreciente y, por consiguiente, converge. Así, pues, la serie dada también converge y, además, converge absolutamente.

270. Hallar el producto de las series absolutamente convergentes

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2^2}{1!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\dots+\frac{2^n}{n!}+\dots$$

y

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\dots+\frac{3^n}{n!}+\dots.$$

Resolución. El producto de las series (según la definición dada en la pág. 73 es la serie

$$1+\left(\frac{2}{1!}+\frac{3}{1!}\right)+\left(\frac{2^2}{2!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}\right)+$$
$$+\left(\frac{2^3}{3!}+\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}\right)+\ldots,$$

o bien

$$1+\frac{1}{1!}(2+3)+\frac{1}{2!}(2^2+2\cdot 2\cdot 3+3^2)+\frac{1}{3!}\cdot(2^3+3\cdot 2^2\cdot 3+3\cdot 2\cdot 3^2+3^3)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(2^n+\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}\cdot 2^{n-1}\cdot 3+\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\cdot 2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+3^n\right)+\ldots.$$

Puesto que $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=C_n^k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, la serie se puede escribir en la forma

$$1+\frac{2+3}{1!}+\frac{(2+3)^2}{2!}+\frac{(2+3)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2+3)^n}{3!}+\ldots,$$

o bien

$$1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\ldots+\frac{5^n}{n!}+\ldots.$$

271. Escribir los primeros cuatro términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+1}$.

272. Escribir los primeros cuatro términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{100^n-1}$.

Escribir las fórmulas de los términos generales de las series:

273. $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10\,000}{13}+\ldots.$

274. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots.$

275. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

276. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots.$

Hallar las sumas de las series:

277. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.$

278. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

279. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots.$

280. $1+\frac{m-1}{m}+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\ldots\ (m>1)$.

281. Con ayuda del criterio necesario mostrar que la serie $\frac{1}{9}+\frac{9}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{39}+\ldots$ diverge.

282. Mostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(2^n+1)^2}$ diverge.

Investigar la convergencia de las series con ayuda del primer criterio de comparación:

283. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$.

284. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$.

Investigar la convergencia de las series, valiéndose del segundo criterio de comparación:

285. $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\ldots$.

Indicación: comparar con la serie $\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots$.

286. $\frac{1}{2\cdot 1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 4-1}+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4-1}+\ldots$.

Valiéndose del criterio de Cauchy, investigar la convergencia de las series:

287. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

288. $3+(2{,}1)^2+(2{,}01)^3+(2{,}001)^4+\ldots$.

Valiéndose del criterio de d'Alembert, investigar la convergencia de las series:

289. $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5+\left(\frac{10}{11}\right)^4\cdot 4^5+\ldots$.

290. $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4^5}+\ldots$.

Valiéndose del criterio integral, investigar la convergencia de las series:

291. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ si $p>1$.

292. $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+\ldots$.

Investigar la convergencia de las series de términos de signos cualesquiera y determinar el carácter de la convergencia (absoluta, condicional):

293. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots$.

294. $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+\dots$.

295. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

296. $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+\dots$.

297. $3\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}-3\frac{1}{8}-3\frac{1}{16}+3\frac{1}{32}+3\frac{1}{64}-3\frac{1}{128}-3\frac{1}{256}+\dots$

Investigar la convergencia de las series:

298. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$.

299. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots$.

300. $\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\dots$.

301. $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\frac{1}{38}+\dots$.

302. $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\dots$.

303. $\frac{1!}{5}+\frac{2!}{5^2}+\frac{3!}{5^3}+\dots$.

304. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\dots$.

305. $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\dots$.

306. $\frac{1}{2\ln 2\cdot\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\cdot\ln\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4\cdot\ln\ln 4}+\dots$

307. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{3^3+1}+\frac{1}{4^3+1}+\dots$.

308. $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\dots$

309. $1-2+3-4+5-6+\dots$.

310. $1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\dots$.

311. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\dots$.

312. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots$.

313. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\dots$.

314. Hallar el producto de las series absolutamente convergentes $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$ y $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots$.

315. Mostrar que la serie $1-\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\dots$ converge absolutamente y elevarla al cuadrado (multiplicarla por sí misma).

§ 2 Series de funciones

La serie

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\dots+u_n(x)+\dots,$$

cuyos términos son funciones de x se llama serie *de funciones*. El conjunto de valores de x con los cuales las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ ... están determinadas y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge se denomina *región de convergencia* de la serie de funciones. La región de convergencia de una serie de funciones suele ser con más frecuencia un intervalo cualquiera del eje Ox. A cada valor en la región de convergencia X le corresponde un valor determinado de $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Esta cantidad que es una función de x ha recibido el nombre de *suma* de una serie de funciones y se designa por $S(x)$.

Representemos la suma de una serie en forma $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, donde

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \quad R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

[$R_n(x)$ es el resto de la serie de funciones].

La serie convergente de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ se llama *uniformemente convergente* en cierta región X si para cada número $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee, existe un número entero positivo N tal que, cuando $n \geqslant N$, se cumpla la desigualdad $|R_n(x)| < \varepsilon$ para cualquier x en la región X. Además, la suma $S(x)$ de una serie uniformemente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ en la región X, donde $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ son funciones continuas, es una función continua.

Formulemos el criterio suficiente de la convergencia uniforme de una serie de funciones, o sea, el *criterio de Weierstrass*.

Si las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ por su valor absoluto no superan en cierta región X los números positivos a_1, a_2, ..., a_n, ..., y además, la serie numérica

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

converge, entonces la serie de funciones

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

converge uniformemente en esta región.

Finalmente enunciamos dos teoremas referentes a la integración y derivación de las series funcionales.

1. *Si la serie $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$, donde $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ ... son funciones continuas, converge uniformemente en cierta región X y tiene la suma $S(x)$, entonces la serie*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \ldots$$

converge y tiene la suma $\int_a^b S(x)\,dx$ (el intervalo $[a, b]$ pertenece a la región X).

2. Sea que las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ están definidas en cierta región X y tienen en esta región las derivadas $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, $u_3'(x)$, ...

Si en esta región la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ converge uniformemente, entonces su suma es igual a la derivada de la suma de la serie inicial:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]'_x.$$

316. Se da la serie de funciones

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + -\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots .$$

Investigar la convergencia de la serie en los puntos $x=0$ y $x=1$.

Resolución. En el punto $x=0$ obtenemos la serie

$$2+\frac{1}{3}\cdot 2^2+\frac{1}{5}\cdot 2^3+\frac{1}{7}\cdot 2^4+\ldots$$

Aquí $u_n = 2^n/(2n-1)$, $u_{n+1} = 2^{n+1}/(2n+1)$. Aplicamos el criterio de d'Alembert:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{2+1/n}=2.$$

o sea, $D>1$. Por consiguiente, la serie diverge.

En el punto $x=1$ obtenemos la serie

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots .$$

Aquí $u_n = 1/(3^n(2n-1))$, $u_{n+1} = 1/(3^{n+1}\cdot(2n+1))$; hallamos

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot(2n-1)}{3^{n+1}\cdot(2n+1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3},$$

o sea, la serie converge.

317. Hallar la región de convergencia de la serie

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+\ldots .$$

Resolución. Encontramos el término general de la serie $u_n = 1/(1+x^{2n})$. Si $|x|<1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}} = 1$; puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, la serie diverge. Si $|x|=1$, entonces también obtenemos la serie divergente $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$.

Si $|x|>1$, entonces los términos de la serie dada son menores que los de la serie geométrica infinita decreciente $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots$, o sea la serie converge.

De suerte que la región de convergencia de la serie se define por la desigualdad $|x|>1$. De ello resulta que la serie converge si $1<x<+\infty$ o bien $-\infty<x<-1$.

318. Mostrar que la serie

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^4+2}+\frac{1}{x^6+3}-\frac{1}{x^8+4}+\dots$$

converge uniformemente para todos los valores de x $(-\infty < x < +\infty)$.

Resolución. La serie dada converge, cualquiera que sea el valor de x según el criterio de Leibniz, por eso su resto se estima con ayuda de la desigualdad $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$, o sea

$$|R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2}+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Puesto que las desigualdades $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$ y $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}-1$ son equivalentes, entonces, tomando $n \geqslant N$, donde N es un número entero positivo cualquiera que satisfaga la condición $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}-1$, llegamos a la desigualdad $|R_n(x)| < \varepsilon$. De suerte que la serie dada converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

319. Mostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ converge uniformemente en el intervalo $]-1, 1[$.

Resolución. En el intervalo indicado la serie converge como progresión geométrica infinitamente decreciente. Tenemos $R_n(x) = x^{n+1}+x^{n+2}+x^{n+3}+\dots$, o sea, $R_n(x) = x^{n+1}/(1-x)$. Pero $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 1/2$, $\lim\limits_{n\to\infty} R(x) = \infty$. Por consiguiente, tomando $\varepsilon > 1/2$, no podemos lograr que la desigualdad se cumpla para cualquier valor de x. Por lo tanto, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ converge no uniformemente.

320. Con ayuda del criterio de Weierstrass mostrar que la serie

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{2^2}\cdot\operatorname{sen}^2 2x + \frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}^3 3x + \dots$$

converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Resolución. Puesto que $\left|\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}^n nx\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ y la serie $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$ converge, entonces la serie dada converge uniformemente cualesquiera que sean los valores de x.

321. ¿Se le puede aplicar a la serie $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\frac{x}{3\sqrt{3}} + \dots + \operatorname{arctg}\frac{x}{n\sqrt{n}}$ el teorema de derivación término a término de las series?

Resolución. Vamos a comparar la serie dada con la convergente

$$x+\frac{x}{2^{3/2}}+\frac{x}{3^{3/2}}+\ldots\frac{x}{n^{3/2}}+\ldots$$

(para una x fija cualquiera). Entonces $u_n(x)=\operatorname{arctg}(x/n^{3/2})$, $v_n(x)=x/n^{3/2}$. Puesto que $\operatorname{arctg}\alpha$ y α son infinitésimos equivalentes, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)}=$ $=1$ y según el segundo criterio de comparación llegamos a la conclusión de que la serie dada converge.

Hallamos la derivada del término general de la serie dada:

$$u_n'(x)=\frac{1/n^{3/2}}{1+x^2/n^3}=\frac{n^{3/2}}{x^2+n^3}.$$

La serie compuesta por las derivadas tiene la forma

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3}+\frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3}+\frac{4\sqrt{4}}{x^2+4^3}+\ldots.$$

Notemos que los términos de la última serie son menores que los términos respectivos de la serie convergente $1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\ldots$. Por consiguiente, conforme al criterio de Weierstrass la serie compuesta por las derivadas converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ y a la serie dada se le puede aplicar el teorema de derivación de las series.

322. ¿Es correcto que a la serie

$$\cos x+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2^2}\cdot\cos 3x+\frac{1}{2^3}\cdot\cos 4x+\ldots$$

se le aplique el teorema de integración de las series de funciones en el intervalo $[\pi/4, \pi/3]$?

Resolución. Los términos de la serie dada, cualquiera que sea el valor de x, son en valor absoluto menores que los términos respectivos de la progresión geométrica infinita decreciente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

Por eso según el criterio de Weierstrass la serie dada converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ y, por consiguiente, se le puede aplicar el teorema de integración de las series para un intervalo finito cualquiera $[a, b]$, en particular, para el intervalo $[\pi/4, \pi/3]$.

323. Se da la serie de funciones

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^3+\ldots.$$

¿Converge la serie en los puntos $x=1$, $x=2$ y $x=3$?

324. Investigar la convergencia de la serie de funciones

$$\frac{1!}{1}(x^2-4x+6)+\frac{2!}{2^2}(x^2-4x+6)^2+\frac{3!}{3^3}(x^2-4x+6)^3+\ldots$$

en los puntos $x=1$ y $x=2$.

325. Hallar la región de convergencia de la serie

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\ldots.$$

326. Hallar la región de convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots.$$

327. Hallar la región de convergencia de la serie

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}-\frac{1}{3^2(x^2+1)^3}+\frac{1}{4^2(x^2+1)^4}+\ldots.$$

328. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^4}$ converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

329. Mostrar que la serie

$$\frac{2x+1}{x+2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^4+\ldots$$

converge uniformemente en el intervalo $[-1, 1]$.

330. Mostrar que la serie

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+\ldots$$

converge no uniformemente en el intervalo $]-2, 2[$.

331. Mostrar que la serie

$$\frac{\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x}{3}+\frac{(\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x)^2}{3^2}+\frac{(\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x)^3}{3^3}+\ldots$$

converge en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ y determinar el carácter de la convergencia.

332. ¿Se puede aplicar a la serie

$$\operatorname{sen} x+\frac{1}{2^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{3}+\frac{1}{4^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{4}+\ldots$$

el teorema de derivación de las series de funciones?

333. ¿Se puede aplicar a la serie $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+\frac{\cos^3 x}{3!}+$ $+\ldots$ el teorema de integración de las series de funciones en un intervalo finito cualquiera $[a, b]$?

334. ¿Se puede aplicar a la serie

$$(x^2+1)+2(x^2+1)^2+3(x^2+1)^3+4(x^2+1)^4+\ldots$$

el teorema de derivación de las series de funciones?

§ 3. Series de potencias

Una serie de funciones de la forma

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots + a_n (x - a)^n + \ldots,$$

donde a, a_0, a_1, ..., a_n son números reales, se llama serie *de potencias*.

La propiedad principal de series de potencias consiste en que *si la serie de potencias converge cuando $x = x_0$, entonces ella converge (y, además, absolutamente) para cualquier valor de x que satisfaga la desigualdad $|x - a| < |x_0 - a|$ (teorema de Abel).*

Uno de los corolarios del teorema de Abel es el hecho de que para toda serie de potencias existe un *intervalo de convergencia* $|x - a| < R$, o bien $a - R < x < a + R$ con centro en el punto a, dentro del cual una serie de potencias converge absolutamente y fuera del cual ella diverge. En los extremos del intervalo de convergencia (en los puntos $x = A \pm R$) diversas series de potencias se comportan de un modo diferente: unas convergen absolutamente en ambos extremos; otras convergen condicionalmente en ambos extremos, o bien en uno de ellos convergen condicionalmente y en el otro divergen; unas terceras divergen en ambos extremos.

El número R, o sea, la mitad de la longitud del intervalo de convergencia, se llama *radio de convergencia* de una serie de potencias. En casos particulares el radio de convergencia R de una serie puede ser igual a cero o infinito. Si $R = 0$, entonces una serie de potencias sólo converge que para $x = a$; si $R = \infty$, entonces la serie converge sobre todo el eje numérico.

Para encontrar el intervalo o el radio de convergencia de una serie de potencias se puede usar uno de los procedimientos siguientes.

1. Si ninguno de los coeficientes de la serie a_1, a_2, ..., a_n, ... es igual a cero, o sea, la serie contiene sólo las potencias enteras positivas de la diferencia $x - a$, entonces

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{1}$$

a condición de que este límite (finito o infinito) exista.

2. Si la serie inicial tiene la forma

$$a_0 + a_1 (x - a)^p + a_2 (x - a)^{2p} + \ldots + a_n (x - a)^{np} + \ldots,$$

(donde p es un cierto número positivo entero: 2, 3, ...), entonces

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}. \tag{2}$$

3. Si la serie tiene coeficientes iguales a cero y la sucesión de los exponentes de la diferencia $x - a$ que han quedado en la serie es cualquiera (o sea, no forma una progresión aritmética, como en el caso precedente), entonces el radio de convergencia se puede determinar por la fórmula

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{3}$$

en la cual se utilizan solamente los valores a_n distintos del cero. (Esta fórmula es útil también en los casos 1 y 2).

4. En todos los casos el intervalo de convergencia se puede determinar aplicando directamente el criterio de d'Alembert o el de Cauchy a una serie compuesta por los valores absolutos de los términos de la serie inicial.

Escribiendo la serie en la forma

$$u_0 (x) + u_1 (x) + u_2 (x) + \ldots + u_n (x) + \ldots$$

(aquí $u_0 = a_0$, $u_n(x) = a_n(x-a)^N$, donde la dependencia de N con respecto a n puede ser cualquiera, con ello por a_n no se designa el coeficiente de $(x-a)^n$ sino el coeficiente del n-ésimo término de la serie), se encuentra el intervalo de convergencia con ayuda de las desigualdades:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1 \text{ o bien } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Notemos la siguiente propiedad de series de potencias: *las series obtenidas mediante derivación o integración término a término de una serie de potencias tienen el mismo intervalo de convergencia y la suma de las mismas dentro del intervalo de convergencia es igual, respectivamente, a la derivada y a la integral de la suma de la serie inicial.*

De este modo, si $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, entonces $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$,

$$\int_a^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1}, \text{ donde } -R < x-a < R.$$

Las operaciones de derivación e integración término a término se pueden efectuar todas las veces que se quiera con una serie de potencias. Por consiguiente ,la suma de una serie de potencias dentro de su intervalo de convergencia es función infinitamente derivable.

335. Investigar la convergencia de la serie de potencias

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots.$$

Resolución. Aquí $a_n = 1/n$, $a_{n+1} = 1/(n+1)$. Determinamos el radio de convergencia de la serie:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Por lo tanto, la serie converge para los valores de x que satisfacen la desigualdad $-1 < x < 1$.

Investigamos la convergencia de la serie en los extremos del intervalo. Si $x = 1$, entonces obtenemos la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ la cual, como es sabido, diverge. Si $x = -1$, entonces obtenemos la serie $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$. Esta serie converge, ya que satisface las condiciones del criterio de Leibniz.

De suerte que la región de convergencia de la serie de potencias se determina por la desigualdad doble $-1 \leqslant x < 1$.

336. Investigar la convergencia de la serie

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \ldots.$$

Resolución. Aquí $a_n = 1/n^2$, $a_{n+1} = 1/(n+1)^2$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Por consiguiente, la serie converge si $-1 < x-2 < 1$, o sea, $1 < x < 3$. Investigamos la convergencia de la serie en los extremos del intervalo. Si $x = 3$, obtenemos la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ la cual converge, ya que la serie $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$ converge cuando $p > 1$. Si $x = 1$, obtenemos la serie $-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots$. Esta serie converge (además, absolutamente), puesto que converge la serie compuesta por los valores absolutos de sus términos.

De suerte que la serie de potencias converge para los valores de x que satisfacen la desigualdad doble $1 \leqslant x \leqslant 3$.

337. Investigar la convergencia de la serie

$$1!\,(x-5) + 2!\,(x-5)^2 + 3!\,(x-5)^3 + \ldots.$$

Resolución. Aquí $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

La serie converge solamente cuando $x-5=0$, o sea, en el punto $x=5$.

338. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Resolución. Tenemos $a_n = 1/n!$, $a_{n+1} = 1/(n+1)!$, $a_0 = 0$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Por consiguiente, la serie converge para cualquier valor de x. De ello, entre otras cosas, sacamos la conclusión de que el límite del término general para todo valor de x es igual a cero, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

339. Investigar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \frac{x^9}{10^3} + \ldots.$$

Resolución. La serie es una progresión geométrica con denominador igual a $q = x^3/10$. La serie converge si $|x^3/10| < 1$ y diverge si $|x^3/10| \geqslant 1$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie se determina por la desigualdad doble $-\sqrt[3]{10} < x < \sqrt[3]{10}$. El mismo resultado se puede obtener utilizando las fórmulas (2) y (3).

340. Investigar la convergencia de la serie

$$2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \frac{16x^{20}}{7} + \ldots.$$

Resolución. Haciendo $x^5 = t$, obtenemos la serie

$$2t + \frac{4t^2}{3} + \frac{8t^3}{5} + \frac{16t^4}{7} + \ldots. \qquad (*)$$

Aquí $a_n = 2^n/(2n-1)$, $a_{n+1} = 2^{n+1}/(2n+1)$. Determinamos el radio de convergencia de la serie (*):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n-1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1/n}{2-1/n} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la serie converge si $|t| < 1/2$.

Investigamos la convergencia de la serie en los extremos del intervalo. Si $t = 1/2$, entonces obtenemos la serie $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$. Esta serie diverge (se puede compararla con la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$ cuyos términos son los de una serie armónica multiplicados por $1/2$.) Para $t = -1/2$ obtenemos la serie $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$. Esta serie converge condicionalmente. Por consiguiente, la serie (*) converge si $-1/2 \leqslant t < 1/2$. Ahora bien, la serie dada converge si $-1/2 \leqslant x^5 < 1/2$, o sea $-1/\sqrt[5]{2} \leqslant x \leqslant 1/\sqrt[5]{2}$. El mismo resultado se puede obtener utilizando la fórmula (2).

341. Investigar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k \times (x-2)^{2k}$.

Resolución. En el caso dado tenemos $a_n = 0$ para $n = 2k-1$ y $a_n = \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ si $n = 2k$. Para determinar el radio de convergencia lo más cómodo es aplicar la fórmula (3). Hallamos

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{2k+1}{k+1}} = \sqrt{2}.$$

Vamos a investigar la serie en los extremos del intervalo de convergencia. Haciendo $x-2=\sqrt{2}$, obtenemos la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k\cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k.$$

Pero $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k = \sqrt{e} \neq 0$. Por lo tanto, para $x-2=\sqrt{2}$ la serie diverge. Lo mismo tiene lugar también para $x-2=-\sqrt{2}$. De suerte que la región de convergencia de la serie dada es $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$.

342. Investigar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Resolución. Aplicamos el criterio de Cauchy haciendo $u_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. Entonces

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x-1|^{n+1}}{n}; \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x-1| \leqslant 1, \\ \infty & \text{si} \quad |x-1| > 1. \end{cases}$$

De este modo, la serie converge si $|x-1| \leqslant 1$, o sea, en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2$.

343. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$.

Resolución. Aplicamos el criterio de d'Alembert, haciendo $u_n = x^{n(n-1)/2}/n!$; $u_{n+1} = x^{n(n+1)/2}/(n+1)!$. Entonces

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^n}{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leqslant 1, \\ \infty & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

De suerte que la serie converge si $|x| \leqslant 1$, o sea, sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

344. Hallar la suma de la serie $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ $\ldots$ $(|x| < 1)$, diferenciando de término a término la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ $(|x| < 1)$.

Resolución. Valiéndonos de la fórmula de la suma de los términos de la progresión geométrica infinitamente decreciente $\left(S = \frac{a}{1-q}\right)$, obtenemos

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Queda por derivar la igualdad obtenida:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

345. Hallar la suma de la serie $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$ $\ldots$ $(|x| < 1)$.

Resolución. Integrando la igualdad

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

dentro de los límites de 0 a x, obtenemos

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots = -\ln(1-x).$$

Esta serie converge en el intervalo $[-1, 1[$.

Investigar la convergencia de las series de potencias:

346. $\frac{x+1}{1!} \frac{(x+1)^2}{3!} \frac{(x+1)^3}{5!} + \ldots$.

347. $(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \ldots$.

348. $\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \ldots$.

349. $x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \ldots$.

350. $5x+\frac{5^2\cdot x^2}{2!}+\frac{5^3\cdot x^3}{3!}+\frac{5^4\cdot x^4}{4!}+\ldots$.

351. $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+\ldots$.

Indicación Hacer $x^2=t$.

352. $\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{8^2\cdot 5}+\frac{x^9}{8^3\cdot 9}+\frac{x^{12}}{8^4\cdot 13}+\ldots$.

353. $\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots$.

354. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\frac{4}{5}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4+\ldots$.

355. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}+\ldots$.

Hallar las sumas de las series:

356. $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\frac{4x^3}{a^4}+\ldots$, si $|x|<a$.

357. $\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+$, ..., si $-a\leqslant x<a$.

358. $\frac{1\cdot 2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{a^3}\cdot x+\frac{3\cdot 4}{a^4}\cdot x^2+\ldots$, si $|x|<a$

359. $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-\ldots$, si $|x|<1$.

§ 4. Desarrollo de funciones en series de potencias

1. Toda función infinitamente derivable en un intervalo $|x-x_0|<r$, o sea, $x_0-r<x<x_0+r$, puede ser desarrollada en este intervalo con una serie infinita de potencias, o sea, una *serie de Taylor* que converge hacia ella.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

si en este intervalo se cumple la condición

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

donde $R_n(x)$ es el término residual de la fórmula de Taylor, $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$. Cuando $x_0=0$, obtenemos la llamada *serie de Maclaurin*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Si en cierto intervalo que contiene el punto x_0 para cualquier n se cumple la desigualdad $|f^{(n)}(x)|<M$, donde M es una constante positiva, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$ y la función $f(x)$ es desarrollable en la serie de Taylor.

Citamos los desarrollos de las funciones siguientes en serie de Taylor:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\operatorname{sh} x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\operatorname{sen} x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots.\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots.$$

Este último desarrollo sirve:

$$\begin{array}{llll} \text{para} & m\geqslant 0, & \text{si} & -1\leqslant x\leqslant 1; \\ \text{para} & -1<m<0, & \text{si} & -1<x\leqslant 1; \\ \text{para} & m\leqslant -1, & \text{si} & -1<x<1; \end{array}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,\quad -1<x\leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

2. **Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes.** Si una función $f(x, y)$ es derivable $n+1$ veces en cierto entorno del punto $P_0(x_0, y_0)$, entonces para todo punto $P(x, y)\in U(P_0)$ es válida la fórmula de Taylor

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}[(x-x_0)f'_x(x_0, y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0, y_0)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[(x-x_0)^2 f''_{xx}(x_0, y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)+f''_{xy}(x_0, y_0)+$$
$$+(y-y_0)^2 f''_{yy}(x_0, y_0)]+\frac{1}{3!}[(x-x_0)^3 f'''_{xxx}(x_0, y_0)+$$
$$+3(x-x_0)^2(y-y_0)f'''_{xxy}(x_0, y_0)+3(x-x_0)(y-y_0)^2 f'''_{yyy}(x_0, y_0)+$$
$$+(y-y_0)^3 f'''_{yyy}(x_0, y_0)]+\ldots+\frac{1}{n!}\Big[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial y}+$$
$$+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^n f(x_0\ y_0)+0\rho^n),$$

donde

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

En el caso particular, cuando $x_0=y_0=0$, la fórmula indicada reviste el aspecto:

$$f(x, y)=f(0, 0)+\frac{1}{1!}[xf'_x(0, 0)+yf'_y(0, 0)]+\frac{1}{2!}[x^2 f''_{xx}(0, 0)+$$
$$+2xyf''_{xy}(0, 0)+y^2 f''_{yy}(0, 0)]+\ldots+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0)+0(\rho^n),$$

donde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, se llama *fórmula de Maclaurin.*

360. Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = 2^x$.

Resolución. Hallamos los valores de la función y de sus derivadas para $x = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2^x, & f(0) = 2^0 = 1, \\ f'(x) = 2^x \ln 2, & f'(0) = \ln 2, \\ f''(x) = 2^x \ln^2 2, & f''(0) = \ln^2 2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = 2^x \cdot \ln^n 2; & f^{(n)}(0) = \ln^n 2. \end{array}$$

Como $0 < \ln 2 < 1$, entonces para una x fija tiene lugar la desigualdad $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ para cualquier n. Por consiguiente, la función puede ser representada en la forma de la suma de la serie Taylor:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots.$$

En el caso dado

$$2^x = 1 + x \cdot \ln 2 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 2}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Esto desarrollo se puede obtener también de otro modo; basta en el desarrollo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

sustituir x por $x \ln 2$.

361. Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Resolución. Derivamos la función $n + 1$ veces:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x,$$

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x,$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x = 2 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -2^2 \cdot \operatorname{sen} 2x = 2^2 \operatorname{sen}\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{IV}(x) = -2^3 \cdot \cos 2x = 2^3 \operatorname{sen}\left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \operatorname{sen}\left[2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right],$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \cdot \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right).$$

Hallamos los valores de las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}x$ en el punto $x = 0$ y el valor de $f^{(n+1)}(x)$ lo determinamos en el punto $x = c$ (véase la igualdad para determinar R_n) Obtenemos $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = -2^3$, $f^{V}(0) = 0$, $f^{VI}(0) = 2^5$, ..., $f^{(n+1)}(c) = 2^n \cdot \operatorname{sen}(2c + \pi n/2)$.

Hallamos el término residual:

$$R_n=\frac{2^n\cdot \operatorname{sen}(2c+\pi n/2)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}, \text{ o sea } R_n=\frac{1}{2}\,\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{sen}(2c+\pi n/2),$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2)x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ para cualquier x y $\operatorname{sen}(2c+\pi n/2)$ es una magnitud limitada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$. Por consiguiente, la función $f(x)=$ $=\operatorname{sen}^2 x$ puede ser representada en forma de la suma de una serie de Taylor:

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}2^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{3^7}{8!}x^8+\dots$$

Este problema puede ser resuelto también de otro modo. Sustituimos $\cos 2x$ en la igualdad $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ por su desarrollo en serie de potencias:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{x!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\dots.$$

Efectuando transformaciones simples, obtenemos el desarrollo hallado anteriormente del $\operatorname{sen}^2 x$.

362. Desarrollar en serie de potencias la función e^{-x^2}.

Resolución. En el desarrollo

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots\quad(-\infty<x<+\infty)$$

sustituimos x por $-x^2$; obtenemos

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\dots\quad(-\infty<x<+\infty).$$

363. Desarrollar $\ln x$ en serie de potencias de $x-1$.

Resolución. En el desarrollo

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\dots\quad(-1<x\leqslant 1)$$

sustituimos x por $x-1$, obtenemos

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots\quad(0<x\leqslant 2).$$

364. Desarrollar $1/x$ en serie de potencias de $x-2$.

Resolución. Utilizamos la igualdad $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1/2}{1+(x-2)/2}$. El segundo miembro de esta igualdad se puede considerar la suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente cuyo primer término es $a=1/2$ y cuyo denominador es $q=-(x-2)/2$. De aquí obtenemos

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\dots,$$

o sea,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\dots$$

Puesto que $|(x-2)/2|<1$, entonces $0<x<4$.

364a. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 4y + 8$ en el entorno del punto $P_0(-3, 1)$

Resolución. Hallemos las derivadas parciales y calculemos sus valores en el punto $P_0(-3, 1)$:

$$f'_x(x, y)=2x-y-3, \quad f'_y(x, y)=-x+3y+4,$$
$$f''_{xx}(x, y)=2, \quad f''_{xy}(x, y)=-1, \quad f''_{yy}(x, y)=4,$$
$$f(-3, 1)=35, \quad f'_x(-3, 1)=-10, \quad f'_y(-3, 1)=11,$$
$$f''_{xx}(-3, 1)=2, \quad f''_{xy}(-3, 1)=-1, \quad f''_{yy}(-3, 1)=4.$$

Por la fórmula de Taylor obtenemos el desarrollo buscado

$$f(x, y)=35-10(x+3)+11(y-1)+(x+3)^2-(x+3)(y-1)+ \\ +2(y-1)^2.$$

364b. Desarrollar por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $P_0(1, 1)$ hasta los términos de segundo orden, inclusive, la función $f(x, y) = x^2 \ln y$.

Resolución. Hallemos las derivadas parciales hasta el segundo orden, inclusive, $f'_x(x, y) = 2x \ln y$, $f'_y(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$,

$$f''_{xx}(x, y)=2 \ln y) \quad f''_{xy}(x, y)=\frac{2x}{y}, \quad f''_{yy}(x, y)=-\frac{x^2}{y^2}.$$

Determinemos los valores de la función y de las derivadas en el punto $P_0(1, 1)$:

$$f(1, 1)=0, \quad f'_x(1, 1)=0, \quad f'_y(1, 1)=1, \quad f''_{xx}(1, 1)=0,$$
$$f''_{xy}(1, 1)=2, \quad f''_{yy}(1, 1)=-1.$$

Por la fórmula de Taylor tenemos el desarrollo

$$f(x, y)=(y-1)+2(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+0(\rho^2),$$

donde $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

364c. Desarrollar por la fórmula de Maclaurin hasta los términos de tercer orden, inclusive, la función $f(x, y) = \operatorname{sh} y \cdot \cos x$.

Resolución. Hallemos las derivadas parciales hasta los términos de tercer orden, inclusive:

$$f'_x(x, y)=-\operatorname{sh} y \cdot \operatorname{sen} x, \quad f'_y(x, y)=\operatorname{ch} y \cdot \cos x,$$
$$f''_{xx}(x, x)=-\operatorname{sh} y \cdot \cos x, \quad f''_{xy}(x, y)=-\operatorname{ch} y \cdot \operatorname{sen} x,$$
$$f''_{yy}(x, y)=\operatorname{sh} y \cdot \cos x, \quad f'''_{xxx}(x, y)=\operatorname{sh} y \cdot \operatorname{sen} x, \quad f'''_{xxy}(x, y)=-\operatorname{ch} y \cdot \cos x,$$
$$f'''_{xyy}(x, y)=-\operatorname{sh} y \cdot \operatorname{sen} x, \quad f'''_{yyy}(x, y)=\operatorname{ch} y \cdot \cos x,$$

Determinemos los valores de la función y de las derivadas para $x_0 = y_0 = 0$:

$$f(0,\ 0)=0,\quad f'_x(0,\ 0)=0,\quad f'_y(0,\ 0)=1,\quad f''_{xx}(0,\ 0)=0,$$
$$f''_{xy}(0,\ 0)=0,\quad f''_{yy}(0,\ 0)=0,\quad f'''_{xxx}(0,\ 0)=0,\quad f'''_{xyy}(0,\ 0)=-1,$$
$$f'''_{xyy}(0,\ 0)=0,\quad f'''_{yyy}(0,\ 0)=1.$$

Por consiguiente, utilizando la fórmula de Maclaurin, obtenemos el desarrollo

$$f(x,\ x)=y-\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{6}y^3+0(\rho^3),$$

donde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

364d. Desarrollar por la fórmula de Maclaurin hasta los términos de cuarto orden, inclusive, la función $f(x,\ y)=e^{-y}\operatorname{sen} x$.

Resolución. Hallemos las derivadas parciales hasta el cuarto orden inclusive

$$f'_x(x,\ y)=e^{-y}\cos x,\quad f'_y(x,\ y)=-e^{-y}\operatorname{sen} x,\quad f''_{xx}(x,\ y)=-e^{-y}\operatorname{sen} x,$$
$$f''_{xy}(x,\ y)=-e^{-y}\cos x,\quad f''_{yy}(x,\ y)=e^{-y}\operatorname{sen} x\quad f'''_{xxx}(x,\ y)=-e^{-y}\cos x,$$
$$f'''_{xxy}(x,\ y)=e^{-y}\operatorname{sen} x,\quad f'''_{xyy}(x,\ y)=e^{-y}\cos x,\quad f'''_{yyy}(x,\ y)=-e^{-y}\operatorname{sen} x,$$
$$f^{IV}_{xxxx}(x,\ y)=e^{-y}\operatorname{sen} x,\quad f^{IV}_{xxxy}(x,\ y)=e^{-y}\cos x,\quad f^{IV}_{xxyy}(x,\ y)=-e^{-y}\operatorname{sen} x$$
$$f^{IV}_{xyyy}(x,\ y)=-e^{-y}\cos x,\quad f^{IV}_{yyyy}(x,\ y)=e^{-y}\operatorname{sen} x.$$

Determinemos ahora los valores de la función y de las derivadas para $x_0 = y_0 = 0$:

$$f(0,\ 0)=0,\quad f'_x(0,\ 0)=1,\quad f'_y(0,\ 0)=0\quad f''_{xx}(0,\ 0)=0,$$
$$f''_{xy}(0,\ 0)=-1,\quad f''_{xy}(0,\ 0)=0,\quad f'''_{xxx}(0,\ 0)=-1,\quad f'''_{xxy}(0,\ 0)=0,$$
$$f'''_{xyy}(0,\ 0)=1,\quad f'''_{yyy}(0,\ 0)=0,\quad f^{IV}_{xxxx}(0,\ 0)=0,\quad f^{IV}_{xxxy}(0,\ 0)=1,$$
$$f^{IV}_{xxyy}(0,\ 0)=0,\quad f^{IV}_{xyyy}(0,\ 0)=-1,\quad f^{IV}_{yyyy}(0,\ 0)=0.$$

Utilizando la fórmula de Maclaurin, obtenemos el desarrollo

$$f(x,\ y)=x-xy-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{6}x^3y=\frac{1}{6}xy^3+0(\rho^4),$$

donde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Desarrollar en series de potencias las funciones siguientes:

365. $f(x)=3^x$. **366.** $f(x)=e^{-2x}$. **367.** $f(x)=\cos^2 x$.

368. $f(x)=\operatorname{sh}^2 x$. **369.** $f(x)=\ln(x+a)$, $a>0$.

370. $f(x)=\sqrt{x+a}$, $a>0$.

370a. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x,\ y)=x^3-2y^3+3xy$ en el entorno del punto $P(2,\ 1)$.

370b. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x,\ y)=4x^3-x^2+2xy-y^2+5x+y-8$ en el entorno del punto $P(1,\ -1)$.

370c. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x,\ y)=5x^2+9y^2-2x+3y-5$ en el entorno del punto $P(1,\ -1)$.

370d. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en el entorno del punto $P(-1, 1)$ hasta los términos de tercer orden, inclusive.

370e. Desarrollar la función $f(x, y) = xe^{-y}$ por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(1, 0)$ hasta los términos de segundo orden, inclusive.

370f. Desarrollar la función $f(x, y) = x\cos^2 y$ por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(-1, 0)$ hasta los términos de tercer orden, inclusive.

371. $f(x) = \operatorname{ch}^2(x^2)$.

§ 5. Cálculos aproximados de los valores de las funciones mediante series de potencias

Aquí es útil tener en cuenta los desarrollos en series de potencias de las funciones e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, citados en el parágrafo precedente.

Para calcular los logaritmos es efectiva la fórmula

$$\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \dots\right].$$

La serie en el segundo miembro de la igualdad converge tanto más rápidamente cuanto mayor es t.

Para calcular el valor aproximado de la función $f(x)$ desarrollada en una serie de potencias se conservan los primeros n términos (n es una magnitud finita), omitiendo los demás. Para la evaluación del error del valor aproximado hallado, es necesario estimar la suma de los términos omitidos. Si la serie dada es de términos de signo constante, entonces la serie formada por los términos omitidos se compara con una progresión geométrica infinita decreciente. Si se trata de una serie de términos de signos cualesquiera que satisfagan el criterio de Leibniz, se utiliza la estimación $|R_n| < u_{n+1}$, donde u_{n+1} es el primero de los términos omitidos de la serie.

372. Estimar el error de la igualdad aproximada

$$e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < n+1.$$

Resolución. El error de esta igualdad aproximada se determina por la suma de los términos que siguen $x^n/n!$ en el desarrollo de e^x:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \dots,$$

o bien

$$R_n = \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right].$$

Sustituyendo cada uno de los factores $n+2$, $n+3$, $n+4$, ... por una menor cantidad $n+1$, obtenemos la desigualdad

$$R_n < \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{n+1}\right)^3 + \dots\right].$$

Sumamos la progresión geométrica infinita decreciente indicada entre corchetes:

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x/(n+1)}{1-x/(n+1)}, \quad \text{o sea,} \quad R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

373. Calcular $\sqrt{e}$ con precisión hasta 0,00001.

Resolución. Utilizando el desarrollo de e^n en serie, obtenemos

$$\sqrt{e} = e^{1/2} = 1 + \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \dots .$$

Determinemos el número n de modo que el error de la igualdad aproximada

$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{2}{2!\cdot 2^2} + \frac{1}{n!\,2^n}$$

no exceda de 0,00001. Utilizamos la estimación del error dada en el problema precedente. Hacemos $x = 1/2$; entonces

$$R_n < \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{1/2}{n+1/2}, \quad \text{o sea,} \quad R_n < \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Efectuando la selección, determinamos para qué valor de n se cumplirá la desigualdad $R_n < 0{,}00001$. Haciendo, por ejemplo, $n = 3$, obtenemos $R_3 < 1/(8 \cdot 6 \cdot 7)$, o sea, $R_3 < 1/366$. Sea, luego, $n = 5$; de ello $R_5 < 1/(32 \cdot 120 \cdot 11)$, o sea, $R_5 < 1/42240$. Sea, por último, $n = 6$, de ello $R_6 < 1/(64 \cdot 720 \cdot 13)$, o sea, $R_6 < 1/100000$. De suerte que tomamos $n = 6$:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \frac{1}{4!\,2^4} + \frac{1}{5!\,2^5} + \frac{1}{6!\,2^6}.$$

Adicionamos los sumandos:

1,000000
0,500000
0,125000
0,020833 (6 veces menos que el sumando precedente)
0,002604 (8 veces menos que el sumando precedente)
0,000260 (10 veces menos que el sumando precedente)
0,000022 (12 veces menos que el sumando precedente)
1,648719.

Esto quiere decir que $\sqrt{e} = 1{,}64872$. A cada sumando lo hemos calculado con precisión de hasta 0,000001, para no obtener, al sumar, un error que exceda de 0,00001.

374. Calcular $1/\sqrt[5]{e}$ con precisión de hasta 0,00001.

Resolución. Tenemos

$$1/\sqrt[5]{e} = e^{-1/5} = 1 - \frac{1}{1!\,5} + \frac{1}{2!\cdot 5^2} - \frac{1}{3!\,5^3} + \dots .$$

Utilizamos la igualdad aproximada

$$1/\sqrt[5]{e} \cong 1 - \frac{1}{1!\,5} + \frac{1}{2!\,5^2} - \frac{1}{3!\,5^3} + \frac{1}{4!\,5^4}.$$

Hemos tomado 5 sumandos, ya que la serie de términos de signos cualesquiera satisface las condiciones del criterio de Leibniz y por eso el error admisible debe ser, en valor absoluto, menor que el primero entre los términos omitidos de la serie. El primero entre los términos omitidos es igual a $1/(5!\ 5^5)$. No es difícil ver que $1/(5!\ 5^5) < 0,00001$.

Vamos a adicionar los sumandos que están en los lugares impares y pares:

$$\begin{array}{r} 1,000000 \\ +0,020000 \\ 0,000067 \\ \hline 1,020067; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,200000 \\ +0,001333 \\ \hline 0,201333. \end{array}$$

Restando de la primera suma la segunda, obtenemos $1,020067 - 0,201333 = 0,818734$. De suerte que $1/\sqrt[5]{e} \cong 0,81873$.

375. Valiéndose del desarrollo de $\cos x$ en serie calcular $\cos 18°$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Tenemos

$$\cos 18° = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \ldots;$$

$$\pi/10 = 0,31416, \quad (\pi/10)^2 = 0,09870, \quad (\pi/10)^4 = 0,00974.$$

Basta tomar tres términos de la serie, ya que $(1/6)\cdot(\pi/10)^6 < 0,0001$. Entonces

$$\cos 18° \cong 1 - \frac{0,09870}{2} + \frac{0,00974}{24}; \quad \cos 18° \cong 0,9511.$$

376. Calcular $\sqrt[5]{1,1}$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Utilizamos el desarrollo de $(1+x)^m$ en serie, haciendo $x = 0,1$, $m = 1/5$. Tenemos

$$\sqrt[5]{1,1} = (1+0,1)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 + \frac{(1/5)(1/5-1)}{2!}\,0,01 +$$

$$+\frac{(1/5)(1/5-1)(1/5-2)}{3!}\,0,001 + \ldots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \ldots.$$

Omitimos el cuarto término y los que le siguen, ya que el cuarto término es menor que 0,0001. De suerte que $\sqrt[5]{1,1} \cong 1,0192$.

377. Calcular $\sqrt[3]{130}$ con precision de hasta 0,001.

Resolución. Puesto que 5^3 es el cubo del número entero más próximo al número 130, es conveniente representar el número 130 en forma de la suma de dos sumandos: $130 = 5^3 + 5$. Entonces

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5(1+0,04)^{1/3} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot 0,04 +\right.$$

$$\left.+\frac{(1/3)(1/3-1)}{2!}\cdot 0,0016 + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3!}\cdot 0,000064 + \ldots\right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot 0,2 - \frac{1}{9}\cdot 0,008 + \frac{5}{81}\cdot 0,00032 - \ldots.$$

El cuarto término es menor que 0,001, por eso este término y los que le siguen pueden ser omitidos. De suerte que $\sqrt[3]{130} \cong 5 + 0,0667 - 0,0009$, o sea, $\sqrt[3]{130} \cong 5,066$.

378. Calcular $\ln 1,04$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Valgámonos del desarrollo de $\ln(1+x)$ en serie:

$$\ln 1,04 = \ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{4} - \frac{0,04^4}{4} + \ldots$$

o bien

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0,00000064 + \ldots,$$

de donde $\ln 1,04 \cong 0,0392$.

379. En un triángulo rectángulo los catetos son iguales a 1 cm y 5 cm. Determinar el ángulo agudo del triángulo que está opuesto al cateto menor con precisión de hasta 0,001 radianes.

Resolución. Puesto que $\operatorname{tg} \alpha = 1/5$, entonces $\alpha = \operatorname{arctg}(1/5)$. Utilizamos el desarrollo

$$\alpha = \operatorname{arctg}(1/5) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \ldots,$$

de donde $\alpha \cong 0,2 - 0,0027$, o sea, $\alpha \cong 0,197$.

380. Estimar el error de la igualdad aproximada

$$\ln(t+1) \cong \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}}\right].$$

Resolución. El problema se reduce a la estimación de la suma del resto de la serie

$$R_n = 2\left[\frac{1}{(2n+1)(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)(2t+1)^{2n+3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2n+5)(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right].$$

Sustituyendo cada uno de los factores $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$, ... por el número menor $2n+1$, obtenemos la desigualdad

$$R_n < \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right].$$

Sumamos la progresión geométrica infinita decreciente puesta entre corchetes:

$$R_n < \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1/(2t+1)^{2n+1}}{1-1/(2t+1)^2} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2t+1)^{2n-1}[(2t+1)^2-1]} =$$
$$= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2t+1)^{2n-1} \cdot 4t(t+1)}, \text{ o sea,}$$
$$R_n < \frac{1}{2(2n+1) \cdot t(t+1) \cdot (2t+1)^{2n-1}}.$$

381. Calcular $\ln 2$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. En la fórmula para determinar $\ln(t+1)$ y en la desigualdad para estimar R_n suponemos $t=1$:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right); \quad R_n < \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}.$$

Por medio de la selección vamos a determinar n de modo que se cumpla la desigualdad $R_n < 0{,}0001$. Si $n=2$, entonces $R_2 < 1/(4\cdot 5\cdot 3^3)$; $R_2 < 1/540$; si $n=3$, entonces $R_3 < 1/(4\cdot 7\cdot 3^5)$; $R_3 < 1/6804$; si $n=4$, entonces $R_4 < 1/(4\cdot 9\cdot 3^7)$; $R_4 < 1/10\,000$.

De suerte que $n=4$ y para determinar $\ln 2$ obtenemos la igualdad aproximada

$$\ln 2 \cong 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right).$$

Adicionando estos cuatro sumandos, nos queda
$\ln 2 \approx 0{,}66667 + 0{,}02469 + 0{,}00165 + 0{,}00013 = 0{,}69314 \approx 0{,}6931$.

382. Calcular $\ln 5$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Hacemos $t=4$. Entonces

$$\ln 5 = 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\ldots\right); \quad R_n < \frac{1}{40\cdot(2n+1)\cdot 9^{2n-1}}.$$

Si $n=1$, entonces $R_1 < 1/(40\cdot 3\cdot 9)$; $R_1 < 1/1080$; si $n=2$, entonces $R_2 < 1/(40\cdot 5\cdot 9^3)$; $R_2 < 1/10\,000$. Esto quiere decir que basta tomar dos términos de la serie. Por consiguiente,

$$\ln 5 \cong 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}\right) \approx 1{,}38628+0{,}22222+0{,}00090=1{,}60940.$$

383. Demostrar la validez de la identidad

$$\pi/4 = \operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3)$$

y calcular π con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Suponiendo que en la igualdad

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$$

$x=1/2$, $y=1/3$, obtenemos

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \text{ o bien } \pi = 4\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Utilizando el desarrollo de $\operatorname{arctg} x$ en serie, tenemos

$$\pi = 4\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right)\right].$$

Efectuamos la adición:

$$\begin{array}{r} 2,00000 \\ 0,02500 \\ 0,00087 \\ +0,00004 \\ 1,33333 \\ 0,00329 \\ 0,00002 \\ \hline 3,36255 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,16667 \\ 0,00446 \\ +0,00018 \\ 0,04938 \\ 0,00026 \\ \hline 0,22095 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,36255 \\ -0,22095 \\ \hline 3,14160 \end{array}$$

De suerte que $\pi = 3,1416$.

Para calcular el número π se pueden utilizar series que convergen más rápidamente que las recién citadas.

384. Calcular el número e con precisión de hasta 0,00001.

385. Calcular $1/\sqrt{e}$ con precisión de hasta 0,00001.

386. Calcular $\operatorname{sen} 9^\circ$ con precisión de hasta 0,0001.

387. Calcular $\operatorname{ch} 0,3$ con precisión de hasta 0,0001.

388. Calcular $\sqrt[3]{1,06}$ con precisión de hasta 0,0001.

389. Calcular $\sqrt{27}$ con precisión de hasta 0,001.

390. Calcular $\ln 0,98$ con precisión de hasta 0,0001.

391. Calcular $\ln 1,1$ con precisión de hasta 0,0001.

392. Calcular $\ln 3$ con precisión de hasta 0,0001.

393. Calcular $\ln 10$ con precisión de hasta 0,0001.

394. Hallar el valor positivo mínimo de x que satisfaga la ecuación trigonométrica $2 \operatorname{sen} x - \cos x = 0$.

395. Calcular π con precisión de hasta 0,001, haciendo $x = 1/\sqrt{3}$ en el desarrollo de $\operatorname{arctg} x$.

§ 6 Aplicación de series de potencias para el cálculo de límites e integrales definidas

396. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \operatorname{sen} x}$.

Resolución sustituyendo e^x y $\operatorname{sen} x$ por sus desarrollos en series de potencias, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2.$$

397. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ldots\right]=\frac{1}{6}.$$

398. Calcular $\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Sustituyendo en la expresión subintegral $\cos x$ por su desarrollo en serie de potencias, obtendremos

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int\limits_0^{1/2}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=\left[\frac{1}{2!}\,x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right]_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{4}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots\approx 0{,}25-0{,}0017=0{,}2483.$$

399. Calcular $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Hallamos

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\int\limits_0^{0,1}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots}{x}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)dx=$$

$$=\left[x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\ldots\right]_0^{0,1}=0{,}1-\frac{1}{4}\cdot 0{,}01+$$

$$+\frac{1}{9}\cdot 0{,}001-\ldots\approx 0{,}098.$$

400. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

401. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

402. Calcular $\int_0^{0,2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ con precisión de hasta 0,0001.

403. Calcular $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}\,dx$ con precisión de hasta 0,001.

§ 7. Números complejos y series con términos complejos

1. Numeros complejos. Se llaman *números complejos* a los que tienen la forma $x+iy$, donde x e y son números reales e i es la *unidad imaginaria* definida por la igualdad $i^2=-1$. Los números reales x e y se denominan, respectivamente, *parte real* y *parte imaginaria* del número complejo z. Para ellos se introducen las designaciones $x=\operatorname{Re} z$; $y=\operatorname{Im} z$.

Geométricamente cada número complejo $z=x+iy$ se representa por el punto $M(x, y)$ del plano de coordenadas xOy (fig. 24).

En este caso el plano xOy se llama plano numérico complejo o *plano de la variable compleja* z. K

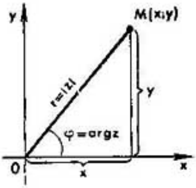

Fig. 24

Las coordenadas polares r y φ del punto M del plano, que es la representación del número complejo z, se llaman *módulo* o *argumento* del número complejo z; para ellas se introducen las designaciones: $r=|z|$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

Como a cada punto del plano corresponde un conjunto innumerable de los valores del ángulo polar que se distinguen uno del otro en $2k\pi$ (k es un número entero, positivo o negativo), $\operatorname{Arg} z$ es una función de infinitos valores de z.

Aquel valor entre los del ángulo polar φ que satisface la desigualdad $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ se denomina *valor principal* del argumento z y se designa por $\arg z$.

En adelante, la designación φ la conservaremos solamente para el valor principal del argumento z, o sea, hacemos $\varphi=\arg z$, en virtud de lo cual para todos los demas valores de z obtendremos la igualdad

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi=\varphi+2k\pi.$$

La relación entre el módulo y el argumento del número complejo z y sus partes real e imaginaria se establecen por las fórmulas:

$$x=r\cos\varphi; \quad y=r\operatorname{sen}\varphi.$$

De ello

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2};$$

$$\cos\varphi=x/|z|=x/\sqrt{x^2+y^2};\ \operatorname{sen}\varphi=y/|z|=y/\sqrt{x^2+y^2}.$$

El argumento de z se puede determinar también por la fórmula

$$\arg z=\operatorname{arctg}(y/x)+C,$$

donde $C=0$ para $x>0$, $C=\pi$ para $x<0$, $y>0$; $C=-\pi$ para $x<0$, $y<0$.

Sustituyendo x e y en la notación del número complejo $z=x+iy$ por sus expresiones mediante r y φ, obtenemos la así llamada *forma trigonométrica del número complejo*:

$$z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi).$$

Los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se consideran iguales si, y sólo si, ellos tienen iguales, por separado, las partes reales e imaginarias:

$$z_1 = z_2 \text{ si } x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

Para los números representados en la forma trigonométrica la igualdad tiene lugar si los módulos de estos números son iguales y los argumentos se distinguen en un entero múltiplo de 2π:

$$z_1 = z_2 \text{ si } |z_1| = |z_2| \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi.$$

Dos números complejos $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ que tienen partes reales iguales y partes imaginarias contrarias se dicen *conjugados*. Para los números complejos conjugados se cumplen las relaciones

$$|z_1| = |z_2|;\ \arg z_1 = -\arg z_2$$

(esta última igualdad se puede expresar en la forma $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = 2k\pi$).

Las operaciones sobre los números complejos se determinan por las reglas siguientes.

Adición. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).$$

La adición de los números complejos se subordina a las leyes conmutativa y asociativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3.$$

Sustracción. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

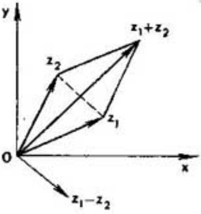

Fig. 25

Para la interpretación geométrica de adición y sustracción de los números complejos es útil no representarlos por puntos sobre el plano z sino por los vectores: el número $z = x + iy$ se representa por el vector OM que tiene el origen en el punto O (punto «nulo» del plano, o sea, el origen de las coordenadas) y el extremo en el punto M (x, y). Entonces la adición y la sustracción de los puntos complejos se cumple según la regla de adición y sustracción de vectores (fig. 25).

Tal interpretación geométrica de las operaciones de adición y sustracción de los vectores permite definir fácilmente los teoremas sobre el módulo de suma y diferencia de dos números complejos y sobre la suma de varios números complejos, expresados por las desigualdades:

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_k| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_k|.$$

Además, es útil recordar que el *módulo de diferencia de dos números complejos z_1 y z_2 es igual a la distancia entre los puntos que son sus representaciones sobre el plano z*: $|z_1 - z_2| = d\,(z_1, z_2)$.

Multiplicación. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Ahora bien, los números complejos se muittplican como binomios y en este caso i^2 se sustituye por -1.

Si $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)$, entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Por lo tanto, el *módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

La multiplicación de los números complejos se subordina a las leyes conmutativa, asociativa y distributiva (respecto a la adición):

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1; \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3;$$
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

División. Para determinar el cociente de dos números complejos representados en la forma algebraica es necesario multiplicar el dividendo y el divisor por el número conjugado con el divisor:

$$z_1 : z_2 = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$
$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Si z_1 y z_2 se dan en forma trigonométrica, entonces

$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Así, pues, el *módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor y el argumento del cociente es igua l a la diferencia los argumentos del dividendo y del divisor.*

Elevación a potencia. Si $z = x + iy$, entonces

$$z^n = (x + iy)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot iy + \ldots + (iy)^n$$

(n es un número entero positivo); en la expresión obtenida es necesario sustituir las potencias de i por sus valores:

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^5 = i, \ldots$$

y en el caso general

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Si $z = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, entonces

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

(aquí n puede ser tanto un número entero positivo como un número negativo).

En particular,

$$(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi$$

(*fórmula de Moivre*).

Extracción de una raíz. Si n es un número entero positivo y $z = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, entonces la raíz de n-ésima potencia extraída del número complejo z tiene n difrentes valores que se determinan por la fórmula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

404. Hallar $(z_1z_2)/z_3$ si $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = 1 + 2i$.

Resolución. Tenemos

$$z_1z_2 = (3 + 5i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 10i - 15 = -9 + 19i,$$

$$\frac{z_1z_2}{z_3} = \frac{-9+19i}{1+2i} = \frac{(-9+19i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-9+18i+19i+38}{1+4} = \frac{29}{5} + \frac{37}{5}i.$$

405. Representar en la forma trigonométrica el número complejo $z = 2 + 5i$.

Resolución. Obtenemos el módulo del número complejo: $r = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \cong 5{,}385$. Hallamos el valor principal del argumento: $\operatorname{tg} \varphi = 5/2 = 2{,}5$, $\varphi = 68°12'$. Por lo tanto, $z = 5{,}385\,(\cos 68°12' + i \operatorname{sen} 68°12')$.

406. Representar en forma trigonométrica el número complejo $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

Resolución. Hallamos

$r = \sqrt{12+4} = 4$; $\quad \operatorname{sen} \varphi = -2/4 = -1/2$; $\quad \cos \varphi = 2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2$; $\quad \varphi = -\pi/6$,

o sea,

$$z = 4\,[\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)].$$

407. Representar en forma trigonométrica los números complejos 1, i, -1, $-i$.

Resolución. Tenemos

$$1 = 1 + 0i = 1\cdot(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0),$$
$$i = 0 + 1\cdot i = 1\cdot[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)],$$
$$1 = -1 + 0\cdot i = 1\cdot(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi),$$
$$-i = 0 - 1\cdot i = 1\cdot[\cos(-\pi/2) + i \operatorname{sen}(-\pi/2)].$$

408. Representar los números $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ en la forma trigonométrica y luego hallar el número complejo $z_1/(z_2z_3)$.

Resolución. Hallamos

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = 1, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \pi/4,$$
$$z_1 = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)];$$
$$r_2 = |z_2| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 1/\sqrt{3}, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \pi/6,$$
$$z_2 = 2\,[\cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6)];$$
$$r_3 = |z_3| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \sqrt{3}, \quad \varphi_3 = \arg z_3 = \pi/3,$$
$$z_3 = 2\,[\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3)].$$

Por consiguiente,

$$z_2z_3 = 2\cdot 2\,[\cos(\pi/6 + \pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/6 + \pi/3)] = 4\,[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2z_3} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,[\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)] =$$
$$= \frac{1}{4}(1 - i).$$

409. Hallar todos los valores de $\sqrt[3]{8+i}$.

Resolución. Escribimos el número complejo $z = \sqrt[3]{8+i}$ en forma trigonométrica. Tenemos $r = |z| = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} \cong 8{,}062$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(1/8) = 7°6'$, o sea, $z = 8{,}062\,(\cos 7°6' + i \operatorname{sen} 7°6')$. Por lo tanto,

$$\sqrt[3]{8+i} = \sqrt[3]{8{,}062}\cdot\left(\cos\frac{7°6'+360°k}{3} + i\operatorname{sen}\frac{7°6'+360°k}{3}\right) =$$

$$= 2{,}0052\,[\cos(2°22' + 120°k) + i \operatorname{sen}(2°22' + 120°k)].$$

Si $k = 0$, entonces $w_0 = 2{,}0052\ (\cos 2°22' + i \operatorname{sen} 2°22')$;

si $k = 1$, entonces $w_1 = 2{,}0052\ (\cos 122°22' + i \operatorname{sen} 122°22')$;

si $k = 2$, entonces $w_2 = 2{,}0052\ (\cos 242°22' + i \operatorname{sen} 242°22')$.

Por consiguiente, $w_0 = 2{,}0034 + 0{,}0828i$; $w_1 = -1{,}0734 + 1{,}7120i$; $w_2 = -0{,}9300 - 17764i$.

410. Resolver la ecuación binomial $w^5 + 32i = 0$.

Resolución. Escribimos la ecuación en la forma $w^5 = -32i$. Representamos el número $-i$ trigonométricamente:

$$w^5 = 32\,[\cos(-90°) + i \operatorname{sen}(-90°)], \text{ o bien } w = = 2\sqrt[5]{\cos(-90°) + i \operatorname{sen}(-90°)},$$

o sea,

$$w = 2\left[\cos\frac{-90°+360°k}{5} + i\operatorname{sen}\frac{-90°+360°k}{5}\right] = = 2\,[\cos(-18°+72°k) + i\operatorname{sen}(-18°+72°k)].$$

Si $k = 0$, entonces $w_0 = 2\,[\cos(-18°) + i \operatorname{sen}(-18°)] = = 1{,}9022 - 0{,}6180i\ (A)$.

Si $k = 1$, entonces $w_1 = 2\,(\cos 54° + i \operatorname{sen} 54°) = = 1{,}1756 + 1{,}6180i\ (B)$.

Si $k = 2$, entonces $w_2 = 2\,(\cos 126° + i \operatorname{sen} 126°) = = -1{,}1756 + 1{,}6180i\ (C)$.

Si $k = 3$, entonces $w_3 = 2\,(\cos 198° + i \operatorname{sen} 198°) = = -1{,}9022 - 0{,}6180i\ (D)$.

Si $k = 4$, entonces $w_4 = 2\,(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = -2i\ (E)$.

A las raíces de la ecuación binomial les corresponden los vértices del pentágono regular inscripto en la circunferencia de radio $R = 2$ que tiene por centro el origen de las coordenadas (fig. 26).

En general, a las raíces de una ecuación binomial $w^n = a$, donde a es un número complejo, les corresponden los vértices de un polígono regular de n lados incripto en la circunferencia con centro en el origen de las coordenadas y radio igual a $\sqrt[n]{|a|}$.

411. Utilizando la fórmula de Moivre, expresar $\cos 5\varphi$ y $\operatorname{sen} 5\varphi$ mediante $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$.

Resolución. Transformamos el primer miembro de la igualdad $(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\operatorname{sen} 5\varphi$ con ayuda de la fórmula del binomio de Neuton:

$$\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\operatorname{sen}\varphi - 10\cos^3\varphi\operatorname{sen}^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\operatorname{sen}^3\varphi + 5\cos\varphi\operatorname{sen} 4\varphi + i\operatorname{sen}^5\varphi = \cos 5\varphi + i\operatorname{sen} 5\varphi.$$

Queda igualar las partes reales e imaginarias de la igualdad:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos\varphi\operatorname{sen}^4\varphi,$$
$$\operatorname{sen} 5\varphi = 5\cos^4\varphi\operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi\operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^5\varphi.$$

412. Se da el número complejo $z = 2 - 2i$. Hallar $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

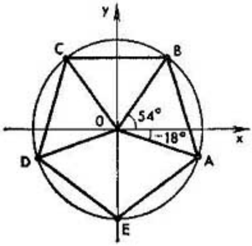

Fig. 26

413. Representar en forma trigonométrica el número complejo $z = -12 + 5i$.

414. Calcular por la fórmula de Moivre la expresión $(\cos 2^\circ + i\operatorname{sen} 2^\circ)^{45}$.

415. Calcular por la fórmula de Moivre $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

416. Representar en la forma trigonométrica el número complejo $z = 1 + \cos 20^\circ + i\operatorname{sen} 20^\circ$.

417. Calcular la expresión $(2 + 3i)^3$.

418. Calcular la expresión $\frac{(1-2i)(2-3i)}{(3-4i)(4-5i)}$.

419. Calcular la expresión $1/(3 - 2i)^2$.

420. Representar en forma trigonométrica el número complejo $5 - 3i$.

421. Representar en forma trigonométrica el número complejo $-1 + i$.

422. Calcular la expresión $\frac{(\cos 77^\circ + i \operatorname{sen} 77^\circ)(\cos 23^\circ + i \operatorname{sen} 23^\circ)}{\cos 55^\circ + i \operatorname{sen} 55^\circ}$.

423. Calcular la expresión $\frac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$, representando previamente en forma trigonométrica los factores del numerador y del denominador.

424. Hallar todos los valores de $\sqrt[4]{i}$.

425. Resolver la ecuación binomial $w^3 - 4\sqrt{2}(1+i) = 0$.

426. Expresar $\cos 4\varphi$ y $\operatorname{sen} 4\varphi$ mediante $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$.

427. Mostrar que la distancia comprendida entre los puntos z_1 y z_2 es igual a $|z_2 - z_1|$.

Resolución. Tenemos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$, de ello

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2},$$

o sea, $|z_2 - z_1|$ es igual a la distancia entre los puntos dados.

428. ¿Qué línea describe el punto z que satisface la ecuación $|z - c| = R$, donde c es un número complejo y $R > 0$?

429. ¿Cuál es la interpretación geométrica de las desigualdades: 1) $|z - c| < R$; 2) $|z - c| > R$?

430. ¿Cuál es la interpretación geométrica de las desigualdades: 1) $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Im} z < 0$?

2. Series con términos complejos. Examinemos una sucesión de números complejos $z_1, z_2, z_3, \ldots$, donde $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

El número constante $c = a + bi$ se llama límite de la sucesión $z_1, z_2, z_3, \ldots$ si para todo número $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existe un número N tal, que todos los valores de z_n con números $n > N$ satisfacen la desigualdad $|z_n - c| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

La condición necesaria y suficiente de existencia del límite de una sucesión de números complejos consiste en lo siguiente: el número $c = a + bi$ es el límite de la sucesión de números complejos $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3, \ldots$ si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

La serie

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots, \tag{1}$$

cuyos términos son números complejos se llama *convergente* si la n-ésima suma parcial de la serie S_n para $n \to \infty$ tiende a cierto límite. En el caso contrario la serie (1) se denomina *divergente*.

La serie (1) converge si, y sólo si, convergen las series con términos reales

$$\operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Re} w_3 + \ldots \tag{2}$$

y

$$\operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} w_2 + \operatorname{Im} w_3 + \ldots. \tag{3}$$

Si la suma de la serie (2) es el número S' y la suma de la serie (3) es S'', entonces de suma de la serie (1) sirve el número complejo $S = S' + iS''$.

Si la serie

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \text{ (donde } w_n = u_n + iv_n)$$

converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ (o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$)

Si converge la serie

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \ldots,$$

entonces converge también la serie

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots.$$

En este caso la última serie se llama *absolutamente convergente.*

Sea dada la serie de potencias

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots,$$

donde z_0, a_0, a_1, a_2, a_3, ... son números complejos, los coeficientes de la serie son distintos de cero y z es una variable compleja.

Esta serie converge en el círculo $|z - z_0| < R$, donde $R = \lim\limits_{n \to \infty} |a_n/a_{n+1}|$ y diverge fuera del círculo indicado, o sea, para valores de z que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| > R$.

431. Investigar la convergencia de la serie

$$(1+i) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} i\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} i\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27} i\right) + \ldots$$

Resolución. Las series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \quad \text{y} \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

convergen, puesto que están compuestas por los términos de una progresión geométrica infinita decreciente. Por consiguiente, converge también la serie dada con números complejos.

Hallamos las sumas de estas progresiones:

$$S_1 = \frac{1}{1 - 1/2} = 2, \quad S_2 = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}.$$

Por consiguiente, la suma de la serie que examinamos es el número complejo $S = 2 + (3/2)\, i$.

432. Investigar la convergencia de la serie

$$(1 + 0{,}1i) + \left(\frac{1}{2} + 0{,}01i\right) + \left(\frac{1}{3} + 0{,}001i\right) + \ldots.$$

Resolución. Examinamos las series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \quad \text{y} \quad 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots.$$

La primera de ellas diverge, por lo tanto, diverge también la serie dada con términos complejos.

433. Investigar la convergencia de la serie

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} i\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5} i\right) + \ldots.$$

Resolución. La serie diverge, ya que su término general $w_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} i$ no tiende a cero (recomendamos convencerse de esto por sí mismo).

434. Mostrar que la serie

$$\frac{1+i}{2}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+\left(\frac{1+i}{2}\right)^3+\cdots$$

converge absolutamente.

Resolución. Puesto que $1+i=\sqrt{2}\,[\cos(\pi/4)+i\operatorname{sen}(\pi/4)]$, entonces

$$w_n=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=\left[\frac{\cos(\pi/4)+i\operatorname{sen}(\pi/4)}{\sqrt{2}}\right]^n=\frac{1}{2^{n/2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}\right).$$

Por consiguiente, $w_n=1/2^{n/2}$. Componemos la serie de los módulos

$$\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{2^2}+\ldots .$$

Esta serie cuyos términos forman una progresión geométrica infinita decreciente converge; por lo tanto, la serie dada con términos complejos converge absolutamente.

435. Hallar la región de convergencia de la serie

$$\frac{\sqrt{3}+i}{3}(z-i)+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^2(z-i)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^3(z-i)^3+\ldots .$$

Resolución. Tenemos

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n,\quad a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n+1},\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}+i},$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{3}{|\sqrt{3}+i|}=\frac{3}{\sqrt{3+1}}=\frac{3}{2},\qquad R=\frac{3}{2}.$$

La región de convergencia es el círculo $|z-i|<3/2$.

436. Mostrar que la serie

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}i\right)+\left(\frac{1}{125}-\frac{1}{8}i\right)+\cdots$$

converge y hallar su suma.

437. Investigar la convergencia de la serie

$$\left(1+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2}i\right)+\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2^3}i\right)+\cdots .$$

438. Investigar la convergencia de la serie con término general $w_n=\frac{1}{m!}+\frac{i}{n}$.

439. Mostrar que la serie

$$1+\frac{1}{2!}(1+i)+\frac{1}{3!}(1+i)^2+\frac{1}{4!}(1+i)^3+\ldots$$

converge absolutamente.

440. Hallar la región de convergencia de la serie

$$z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots.$$

441. Hallar la región de convergencia de la serie

$$(z-1-i)+2!\,(z-1-i)^2+3!\,(z-1-i)^3+\dots.$$

3. Funciones exponencial y trigonométricas de una variable compleja. *Las funciones exponencial y trigonométricas de una variable compleja z se definen por las igualdades*

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots;$$

$$\operatorname{sen} z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots.$$

Entre las funciones indicadas existen las relaciones siguientes:

$$e^{zi}=\cos z+i\operatorname{sen} z, \tag{1}$$

$$e^{-zi}=\cos z-i\operatorname{sen} z, \tag{2}$$

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} \tag{4}$$

denominadas *fórmulas de Euler*.

Con ayuda de la fórmula (1) el número complejo representado en forma trigonométrica $z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ puede ser dado en forma exponencial $z=re^{\varphi i}$.

442. Representar en las formas trigonométrica y exponencial el número complejo $z=3+i\sqrt{3}$.

Resolución. Hallamos $r=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$, $\varphi=\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3)=\pi/6$. Por consiguiente, la forma trigonométrica del número dado tiene la forma

$$z=2\sqrt{3}\,[\cos(\pi/6)+i\operatorname{sen}(\pi/6)]$$

y la forma exponcional tiene la forma

$$z=2\sqrt{3}\,e^{\pi i/6}.$$

443. Representar en forma exponencial el número $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Resolución. Tenemos $r=\sqrt{2+2}=2$, $\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot 2=-1$, $\varphi=-\pi/4$, o sea, $z=2e^{-\pi i/4}$.

444. Hallar el valor numérico $e^{\pi i/2}$.

Resolución. Utilizamos la fórmula (1):

$$e^{\pi i/2}=\cos(\pi/2)+i\operatorname{sen}(\pi/2)=i.$$

445. Demostrar con ayuda de la fórmula de Euler que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

Resolución. Puesto que $\cos x = (e^{xi} + e^{-xi})/2$, entonces

$$\cos^3 x = \frac{e^{3xi} + 3e^{xi} + 3e^{-xi} + e^{-3xi}}{8} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

446. Representar en forma exponencial el número complejo $z = \sqrt{3} + i$.

447. Representar el número $-i$ en forma exponencial.

448. ¿A qué es igual $e^{\pi i}$?

449. Mostrar que

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x.$$

450. Expresar $\operatorname{sen}^3 x$ linealmente mediante $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} 3x$.

451. Mostrar con ayuda de la fórmula de Euler que i^i tiene un conjunto innumerable de valores, y que todos son reales.

§ 3. Serie de Fourier

Se llama *serie de Fourier* de la función $f(x)$ definida sobre el segment $[-\pi, \pi]$ a la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx),$$

donde

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} mx\,dx \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Para toda función $f(x)$ derivable por partes sobre $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier converge hacia esta función en cada punto de su continuidad o hacia la magnitud $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ si x_0 es el punto de discontinuidad.

Convengamos también en tomar por el valor de la función $f(x)$ en cada uno de los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ la magnitud $(1/2)\,[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)$.

Si la función $f(x)$ en el segmento $[-\pi, \pi]$ tiene un número finito de extremos y es continua, a excepción, quizás, de un número finito de puntos con discontinuidad de primer género (o sea, satisface las llamadas condiciones de Dirichlet), entonces la serie de Fourier en cada punto del segmento $[-\pi, \pi]$ converge hacia la función $f(x)$ (teorema de Dirichlet).

No es difícil ver que la suma de la serie de Fourier de la función $f(x)$ es una función periódica con período de 2π.

Si la función $f(x)$ se define en el segmento $[-l, l]$, donde l es un número arbitrario, entonces, siempre que sobre el segmento $[-l, l]$ se cumplan las condiciones de Dirichlet, la función indicada puede ser representada como suma de la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\right),$$

donde

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx,\qquad b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si $f(x)$ es una función par, entonces su serie de Fourier contiene solamente un término independiente y cosenos, o sea,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l},$$

donde

$$a_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si $f(x)$ es una función impar, entonces su serie de Fourier contiene solamente senos, o sea,

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l},$$

donde

$$b_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si la función $f(x)$ se define en el segmento $[0, l]$, entonces para desarrollarla en serie de Fourier es suficiente definirla adicionalmente en el segmento $[-l, 0]$ por un procedimiento arbitrario y luego desarrollarla en serie de Fourier considerándola definida en el segmento $[-l, l]$. Conviene definir adicionalmente la función de modo que sus valores en los puntos del segmento $[-l, 0]$ se encuentren de la condición $f(x) = f(-x)$ o bien $f(x) = -f(-x)$. En el primer caso la función $f(x)$ en el segmento $[-l, l]$ será par y en el segundo caso, impar. Con ello los coeficientes del desarrollo de esta función (a_m si se trata del primer caso y b_m si se trata del segundo) se pueden determinar por las fórmulas citadas anteriormente para los coeficientes de las funciones pares e impares.

452. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x) = \pi + x$.

Resolución. El gráfico de esta función es el segmento que une los puntos $(-\pi; 0)$ y $(\pi; 2\pi)$. En la fig. 27 se muestra el gráfico de la función $y = S(x)$, donde $S(x)$ es la suma de la serie de Fourier de la función $f(x)$. Esta suma es una función periódica con período de 2π y coincide con la función $f(x)$ en el segmento $[-\pi, \pi]$.

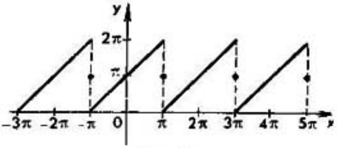

Fig. 27

Determinamos los coeficientes de la serie de Fourier. Primeramente hallamos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx.$$

La segunda integral es igual a cero como integral de función impar, tomada en el intervalo simétrico respecto al origen de coordenadas. De este modo, $a_0 = \int_{\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$

Luego hallamos los coeficientes de a_m. Tenemos

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cos mx\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx\, dx.$$

No es difícil ver que ambas integrales son iguales a cero (la función subintegral de la segunda integral es impar como producto de una función par por una impar). De suerte que $a_m = 0$, o sea, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$.

Ahora determinamos los coeficientes de b_m:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \operatorname{sen} mx\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} mx\, dx.$$

La primera integral es igual a cero. La función subintegral de la segunda integral es par como producto de dos funciones impares. Por lo tanto,

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} mx\, dx.$$

Integrando por partes, obtenemos $u = x$, $dv = \operatorname{sen} mx\,dx$, $du = dx$, $v = -(1/m)\cdot\cos mx$, o sea,

$$b_m = -\frac{2x}{m\pi}\cos mx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{m\pi}\int_0^{\pi}\cos mx\,dx\,\frac{2}{m}\cdot\cos m\pi +$$

$$+\frac{2}{\pi m^2}\operatorname{sen} mx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{m}(-1)^m = \frac{2}{m}(-1)^{m+1}.$$

Por consiguiente, el desarrollo de la función $f(x)$ en serie de Fourier tiene la forma

$$f(x) = \pi + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\operatorname{sen} mx =$$

$$= \pi + 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \dots\right).$$

453. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-1, 1]$ por la ecuación $f(x) = x^2$ (fig. 28).

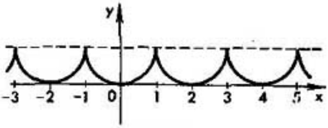

Fig. 28

Resolución. La función dada es par. Su gráfico es el arco de la parábola comprendida entre los puntos $(-1; 1)$ y $(1; 1)$. Aquí $l = 1$; por eso

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$a_m = \frac{2}{1}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = 2\int_0^1 x^2\cos m\pi x\,dx.$$

Aquí es necesario integrar por partes dos veces:

1) $u = x^2$, $dv = \cos m\pi x\,dx$, $du = 2x\,dx$, $v = \dfrac{1}{\pi m}\operatorname{sen} m\pi x$;

$$a_m = \frac{2x^2}{m\pi}\operatorname{sen} m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen} m\pi x\,dx = -\frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen} m\pi x\,dx;$$

2) $u = x$, $dv = \operatorname{sen} m\pi x\,dx$, $du = dx$, $v = -\dfrac{1}{m\pi}\cos m\pi x$;

$$a_m = \frac{4x}{m^2\pi^2}\cos m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^1\cos m\pi x\,dx = \frac{4}{m^2\pi^2}(-1)^m.$$

Como la función que se examina es par, $b_m=0$. Por consiguiente,

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\frac{\cos 4\pi x}{4^2}+\ldots\right).$$

454. Desarrollar en serie de Fourier la función definida sobre el semiperíodo en el segmento [0, 2] por la ecuación $f(x)=x-x^2/2$.

Resolución. La función puede ser desarrollada en serie de Fourier por una cantidad innumerable de procedimientos. Aquí daremos las dos variantes más importantes del desarrollo.

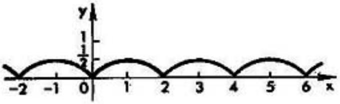

Fig. 29

1) Determinamos adicionalmente la función $f(x)$ sobre el segmento [—2, 0] del modo par (fig. 29). Tenemos $l=2$.

$$a_0=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{2}{3},$$

$$a_m=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Integramos por partes:

$$u=x-\frac{1}{2}x^2\quad dv=\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx,\quad du=(1-x)\,dx,\quad v=\frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2};$$

$$a_m=\frac{2}{m\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Integramos por partes una vez más:

$$u=1-x,\quad dv=\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx,\quad du=-dx,\quad v=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}:$$

$$a_m=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{4}{m^2\pi^2}\cos m\pi-\frac{4}{m^2\pi^2}=-\frac{4}{m^2\pi^2}[1+(-1)^m],\quad b_m=0.$$

Por lo tanto,

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^m}{m^2}\cos\frac{m\pi x}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 3\pi x+\dots\right).$$

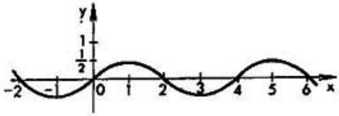

Fig. 30

2) Determinemos adicionalmente la función $f(x)$ sobre el segmento $[-2, 0]$ del modo impar (fig. 30):

$$b_m=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u=x-\frac{1}{2}x^2,\quad dv=\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx,$$

$$du=(1-x)\,dx,\quad v=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m=-\frac{2}{m\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u=1-x,\quad dv=\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx,\quad du=-dx,\quad v=\frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{8}{m^3\pi^3}\cdot\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2=-\frac{8}{m^3\pi^3}\cos m\pi+\frac{8}{m^3\pi^3}=\frac{8}{m^3\pi^3}[1-(-1)^m];$$

$$a_m=0\ (m=0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

De suerte que

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m^3}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}=\frac{16}{\pi^3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5^3}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2}+\dots\right).$$

455. Desarrollar en serie de Fourier la función (fig. 31) definida en el segmento $[-l, l]$ del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad -l\leqslant x\leqslant 0; \\ x, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant l/2; \\ l/2, & \text{si} \quad l/2\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

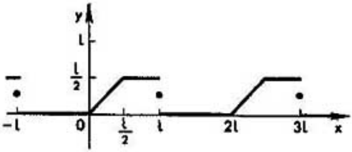

Fig. 31

Resolución. Hallamos

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} f(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} x\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l}\frac{l}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{l/2}+\frac{1}{2}\,x\Big|_{l/2}^{l}=\frac{l}{8}+\frac{l}{4}=\frac{3}{8}l;$$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} x\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l}\frac{l}{2}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Aplicamos a la primera integral la integración por partes:

$$u=x, \quad dv=\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx; \quad du=dx, \quad v=\frac{l}{m\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l},$$

de donde

$$a_m=\frac{x}{m\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\frac{1}{m\pi}\int_{0}^{l/2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{l}{2m\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=\frac{l}{2m\pi}\cdot\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+$$

$$+\frac{l}{2m\pi}\left(\operatorname{sen} m\pi-\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}\right)=\frac{l}{m^2\pi^2}\left(\cos\frac{m\pi}{2}-1\right).$$

Determinamos los coeficientes de b_m:

$$b_m=\frac{1}{l}\int_0^{l/2} x \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{l/2}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Aplicamos a la primera integral la integración por partes:

$$u=x,\quad dv=\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx,\quad du=dx,\quad v=-\frac{l}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}.$$

Tenemos

$$b_m=-\frac{x}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{1}{m\pi}\int_0^{l/2}\cos\frac{m\pi x}{l}dx-\frac{l}{2m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=-\frac{1}{2m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\frac{l}{2m\pi}\left(\cos m\pi-\cos\frac{m\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{m^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}-\frac{l}{2m\pi}(-1)^m.$$

Si $m=1$, entonces $a_1=-\frac{l}{\pi^2}$, $b_1=\frac{l}{\pi^2}+\frac{l}{2\pi}=l\cdot\frac{2+\pi}{2\pi^2}$.

Si $m=2$, entonces $a_2=-\frac{l}{2\pi^2}$, $b_2=-\frac{1}{4\pi}$.

Si $m=3$, entonces $a_3=-\frac{l}{9\pi^2}$, $b_3=-\frac{l}{9\pi^2}+\frac{l}{6\pi}=l\cdot\frac{3\pi-2}{18\pi^2}$.

Si $m=4$, entonces $a_4=0$, $b_4=-\frac{l}{8\pi}$.

Si $m=5$, entonces $a_5=-\frac{l}{25\pi^2}$, $b_5=\frac{l}{25\pi^2}+\frac{l}{10\pi}=l\cdot\frac{2+5\pi}{50\pi^2}$.

. . . .

Por consiguiente,

$$f(x)=l\Big[\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\right)+\left(-\frac{1}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{l}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{l}\right)+\left(-\frac{1}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\frac{-2+3\pi}{18\pi^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}\right)+\dots\Big].$$

456. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x)=x$.

457. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-1, 1]$ por la ecuación $f(x)=|x|$.

458. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x)=e^x$.

459. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x)=x^3$.

460. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[0, \pi]$ por la ecuación $f(x)=\pi-2x$, continuándola sobre el segmento $[-\pi, 0]$: 1) del modo par; 2) del modo impar.

461. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} -h, & \text{si } -\pi\leqslant x\leqslant 0; \\ h, & \text{si } 0<x\leqslant\pi. \end{cases}$$

462. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{si } -\pi\leqslant x\leqslant 0; \\ 3x, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$$

463. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[0, \pi]$ por la ecuación $f(x) = x^2$, continuándola del modo impar sobre el segmento $[-\pi, 0]$.

464. Desarrollar en serie de Fourier en el segmento $[-\pi, \pi]$ la función

$$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{si } -\pi<x<0; \\ 0, & \text{si } 0<x<\pi. \end{cases}$$

465. Desarrollar en senos en el segmento $[0, \pi]$ la función $f(x) = \cos 2x$.

466. Desarrollar en senos en el segmento $[0, 1]$ la función $f(x) = x$.

467. Desarrollar en cosenos en el segmento $[0, 2]$ la función

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } 0<x\leqslant 1; \\ 2-x, & \text{si } 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

§ 9. Integral de Fourier

Si la función $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en un segmento finito cualquiera del eje Ox y es absolutamente integrable a lo largo de todo el eje (o sea, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge), entonces para ella es justa la *fórmula integral de Fourier* (que se obtiene por el paso al límite de la serie de Fourier cuando $l\to\infty$):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du$$

(en los puntos de discontinuidad de primer género como valor $f(x)$ se toma, como antes, $1/2\,[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$, donde x_0 es la abscisa del punto de discontinuidad).

La integral de Fourier se puede representar en *forma compleja*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{iz(u-x)}\, du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx}\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu} f(u)\, du.$$

La integral exterior se entiende en el sentido del valor principal, o sea, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du=\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N} f(u)\, du$.

Para la función par la integral de Fourier puede ser representada en la forma

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos zx\, dz \int_{0}^{+\infty} f(u)\cos zu\, du,$$

y para la función impar, en la forma

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} zx\, dz \int_{0}^{+\infty} f(u)\operatorname{sen} zu\, du.$$

Con las tres últimas fórmulas se vinculan las llamadas transformaciones integrales de Fourier:

1. *Transformación de Fourier de forma general:*

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x)\, dx \quad (\textit{directa}),$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} F(z)\, dz \quad (\textit{inverza}).$$

2. *Coseno-transformación de Fourier* (para las funciones pares):

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos zx\, dx \quad (\textit{directa}),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f_c(z)\cos zx\, dz \quad (\textit{inversa}).$$

3. *Seno-transformación de Fourier* (para las funciones impares):

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(x)\operatorname{sen} zx\, dx \quad (\textit{directa}),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f_s(z)\operatorname{sen} zx\, dz \quad (\textit{inversa}).$$

Las seno- y coseno-transformaciones de Fourier pueden aplicarse a las funciones definidas solamente sobre el semieje positivo Ox, si ellas son absolutamente integrables a lo largo de este semieje y satisfacen sobre un segmento finito cualquiera del mismo las condiciones de Dirichlet. Con ello la seno-transformación continúa la función $f(x)$ sobre el semieje negativo del modo impar y la coseno-transformación, del modo par.

468. Hallar las coseno- y seno-transformaciones de la función $f(x) = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$.

Resolución. Tenemos

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cos zu \, du.$$

Puesto que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u} \cos zu \, du = \frac{1}{z^2+1}$, entonces

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{z^2+1}.$$

Análogamente obtenemos

$$f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z}{z^2+1}.$$

Aplicando, a su vez, las coseno- y seno-transformaciones de Fourier a las funciones $f_c(z)$ y $f_s(z)$, obtenemos la función $f(x)$, o sea,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{z^2+1} \, dz = e^{-x}, \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{z \operatorname{sen} zx}{z^2+1} \, dz = e^{-x}.$$

De ello obtenemos las *integrales de Laplace*:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{z^2+1} \, dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{z \operatorname{sen} zx}{z^2+1} \, dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

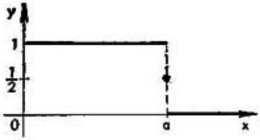

Fig. 32

469. Sea la función $f(x)$ definida por las igualdades

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leqslant x < a; \\ 1/2, & \text{si } x = a; \\ 0, & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Hallar las coseno- y seno-transformaciones de la misma (fig. 32)

Resolución. Hallamos la coseno-transformación de la función dada:

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\cos zu\,du+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{+\infty} 0\cdot\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen} az}{z}.$$

Hallamos ahora la seno-transformación:

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\operatorname{sen} zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\operatorname{sen} zu\,du+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{\infty} 0\cdot\operatorname{sen} zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\operatorname{sen} zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos az}{z}.$$

De ello obtenemos

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} az}{z}\cos xz\,dz=\begin{cases}1, & \text{si } 0\leqslant x<a;\\ 1/2, & \text{si } x=a;\\ 0, & \text{si } x>a\end{cases}$$

(*factor discontinuo de Dirichlet*) y

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos az}{z}\operatorname{sen} xz\,dz=\begin{cases}1, & \text{si } 0\leqslant x<a;\\ 1/2, & \text{si } x=a\\ 0, & \text{si } x>a.\end{cases}$$

470. Hallar la transformación de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant -1/2;\\ 1, & \text{si } |x|<1/2;\\ -x+1, & \text{si } 1/2\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{si } 1<|x|.\end{cases}$$

Resolución. Según la fórmula de transformación de Fourier

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{izu}\,du,$$

utilizando la forma de la función $f(x)$, encontramos que

$$\sqrt{2\pi}\,F(z)=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot e^{izu}\,du+\int_{-1}^{-1/2}(u+1)\,e^{izu}\,du+$$

$$+\int_{-1/2}^{1/2} 1\cdot e^{izu}\,du+\int_{1/2}^{1}(-u+1)\,e^{izu}\,du+\int_{1}^{+\infty} 0\cdot e^{izu}\,du.$$

Es evidente que la primera y última integral son iguales a cero. Designemos las demás integrales por I_1, I_2 e I_3, respectivamente, y las calculamos:

$$I_1=\int_{-1}^{-1/2}(u+1)e^{izu}\,du=\left[\frac{1}{zi}(u+1)e^{izu}-\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right]_{-1}^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{zi}\cdot\frac{1}{2}e^{-iz/2}-\frac{1}{i^2z^2}e^{-iz/2}+\frac{1}{i^2z^2}e^{-iz}=\frac{1}{2zi}e^{-zi/2}+$$

$$+\frac{1}{z^2}e^{-zi/2}-\frac{1}{z^2}e^{-zi};$$

$$I_2=\int_{-1/2}^{1/2}e^{izu}du=\frac{1}{zi}e^{izu}\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{zi}\left(e^{zi/2}-e^{-zi/2}\right)=\frac{2\operatorname{sen}(z/2)}{z};$$

$$I_3=\int_{1/2}^{1}(-u+1)e^{izu}du=\left[\frac{1}{zi}(-u+1)e^{izu}+\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right]_{1/2}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{z^2}e^{zi}-\frac{1}{2zi}e^{zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{zi/2}.$$

De suerte que

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2zi}e^{-zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{-zi/2}-\frac{1}{z^2}e^{-zi}+\frac{2\operatorname{sen}(z/2)}{z}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z^2}e^{zi}-\frac{1}{2zi}e^{zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{zi/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2\cos z}{z^2}+\frac{\operatorname{sen}(z/2)}{z}+\frac{2\cos(z/2)}{z^2}\right].$$

471. Hallar la transformación de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x/2), & \text{si } |x|\leqslant\pi;\\ 0, & \text{si } |x|>\pi.\end{cases}$$

472. Hallar la transformación de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & \text{si } -1\leqslant x<0;\\ e^{-x}, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{si } |x|>1.\end{cases}$$

473. Hallar las seno- y coseno-transformación de Fourier de la función

$$f(y)=\begin{cases}-1, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant -1/2;\\ 0, & \text{si } -1/2\leqslant x<1/2;\\ 1, & \text{si } 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Capítulo IV. Ecuaciones diferenciales ordinarias

§ 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Conceptos básicos. Se llama *ecuación diferencial* a la que vincula variables independientes, su función y las derivadas (o diferenciales) de esta función. Si la variable independiente es una sola, la ecuación se denomina *ordinaria*; si hay dos variables independientes o más, *ecuación* diferencial *en derivadas parciales*.

El orden superior de la derivada que forma parte de la ecuación se llama orden de la ecuación diferencial. Por ejemplo:

1) $x^2y' + 5xy = y^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden;

2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} = x^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden;

3) $y'^3 + y''y''' = x$ es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden;

4) $F(x, y, y', y'') = 0$ es la forma general de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden);

5) $x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = 0$ es una ecuación en derivadas parciales de primer orden.

En este parágrafo se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, o sea, las que tienen la forma $F(x, y, y') = 0$ o $y' = f(x, y)$ (la forma resuelta con respecto a y').

Se denomina *solución* de una ecuación diferencial a aquella función derivable $y = \varphi(x)$ que el sustituir en la ecuación a la función incógnita, la transforma en identidad.

Se denomina *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ en el dominio D a la función $y = \varphi(x, C)$ que posee las propiedades siguientes: 1) es la solución de la ecuación dada cualesquiera que sean los valores de la constante arbitraria C que pertenecen a cierto conjunto; 2) para toda condición inicial $y(x_0) = y_0$, tal que $(x_0; y_0) \in D$, existe un valor único de $C = C_0$, con el cual la solución $y = \varphi(x, C_0)$ satisface la condición inicial dada.

Toda solución $y = \varphi(x, C_0)$ que se obtiene de la solución general $y = \varphi(x, C)$ para cada valor concreto de $C = C_0$ se llama *solución particular*.

Un problema en el cual se requiere hallar una solución particular de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$ se denomina problema de Cauchy.

El gráfico, construido sobre el plano xOy, de toda solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial dada se llama *curva integral* de esta ecuación. De este modo, a la solución general $y = \varphi(x, C)$ sobre el plano xOy le corresponde una familia de curvas integrales que depende de un solo parámetro, o sea, de la constante arbitraria C y a la solución particular que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ le corresponde una curva de esta familia que pasa por el punto dado $M_0(x_0;\ y_0)$.

Sin embargo, existen ecuaciones diferenciales que tienen tales soluciones que no se obtienen de la solución general para ningún valor de C (incluso cuando $C = \pm\infty$). Tales soluciones se llaman *singulares*. Por ejemplo, efectuando la comprobación, se puede verificar que la ecuación $y' = \sqrt{1-y^2}$ tiene la solución general $y = \operatorname{sen}(x + C)$, mientras que la función $y = 1$ es también una solución de esta ecuación, pero ella no puede obtenerse en la solución general para ningún valor de C, o sea, es singular.

El gráfico de la solución singular es una curva integral que en cada punto tiene una tangente común a una de las curvas integrales definidas por la solución general. Esta curva se denomina *envolvente* de una familia de curvas integrales.

El proceso de obtención de las soluciones de una ecuación diferencial se llama *integración* de la ecuación diferencial.

2. Ecuaciones diferenciales con variables separables. La ecuación diferencial que tiene la forma

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0$$

pertenece al tipo de ecuaciones con variables separables. Si ninguna de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ no es idénticamente igual a cero, entonces, como resultado de la división de la ecuación inicial por $f_2(x)\,\varphi_1(y)$, ella se reduce a la forma

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = 0.$$

La integración término a término de la última ecuación conduce a la relación

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = C$$

que precisamente determina (en forma implícita) la solución de la ecuación inicial. (La solución de una ecuación diferencial expresada en forma implícita se denomina *integral* de esta ecuación.)

474. Hallar la integral particular de la ecuación $y' \cos x = y/\ln y$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

Resolución. Haciendo $y' = \frac{dy}{dx}$, escribimos la ecuación dada en la forma

$$\cos x\,\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}.$$

Separamos las variables:

$$\frac{\ln y}{y}\,dy = \frac{dx}{\cos x}.$$

Integramos ambos miembros de la ecuación:

$$\int \frac{\ln y}{y}\,dy = \int \frac{dx}{\cos x} + C, \text{ o bien, } \frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Utilizando la condición inicial $y = 1$ para $x = 0$, hallamos $C = 0$. Finalmente obtenemos

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

475. Hallar la integral general de la ecuación $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Resolución. Haciendo $y' = \frac{dy}{dx}$ y separando las variables, llegamos a la ecuación $\operatorname{ctg} y\, dy = \operatorname{tg} x\, dx$. Integrando, tenemos

$$\int \operatorname{ctg} y\, dy \int \operatorname{tg} x\, dx, \text{ o bien } \ln|\operatorname{sen} y| = -\ln|\cos x| + \ln C$$

(aquí es más cómodamente designar la constante de integración por $\ln C$). De ello encontramos $\operatorname{sen} y = C/\cos x$, o bien $\operatorname{sen} y \cos x = C$ (integral general).

476. Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $(1 + x^2)\, dy + y\, dx = 0$ para la condición inicial $y(1) = 1$.

Resolución. Transformamos la ecuación dada reduciéndola a la forma $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Integrando, obtendremos

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}, \text{ o bien } \ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C.$$

Esto es precisamente la integral general de la ecuación dada.

Ahora, utilizando la condición inicial, hallemos la constante arbitraria C; tenemos $\ln 1 = -\operatorname{arctg} 1 + C$, o sea, $C = \pi/4$. Por lo tanto,

$$\ln y = -\operatorname{arctg} x + \pi/4,$$

de donde obtenemos la solución particular buscada

$$y = e^{\pi/4 - \operatorname{arctg} x}.$$

Vamos a resolver algunos problemas geométricos y físicos que conducen a las ecuaciones diferenciales del tipo examinado.

477. Hallar las curvas en las cuales la suma de longitudes de la normal y de la subnormal es una constante igual a a.

Resolución. La longitud de la subnormal es igual a $|yy'|$ y la longitud de la normal es igual a $|y\sqrt{1+y'^2}|$. Ahora bien, la ecuación a la cual deben satisfacer las curvas buscadas tiene la forma

$$|yy'| + |y\sqrt{1+y'^2}| = a.$$

Despejando en ella y', encontramos (teniendo en cuenta ambos signos posibles):

$$y' = \pm \frac{a^2 - y^2}{2ay}.$$

Separamos las variables:

$$\frac{2y\, dy}{a^2 - y^2} = \pm \frac{dx}{a}.$$

Integrando, obtenemos la integral general: $\ln|a^2 - y^2| = \pm x/a + \ln C$. Cumpliendo la potenciación, reducimos la ecuación de curvas buscadas a la forma

$$y^2 = a^2 - Ce^{\pm x/a}.$$

A los datos del problema les corresponden solamente los valores de $C > 0$. Efectivamente, de la ecuación de la familia de curvas encontramos:

$$|yy'| = \frac{|a^2 - y^2|}{2a}, \quad |y\sqrt{1+y'^2}| = \frac{a^2+y^2}{2a}.$$

Por eso, para cumplir la condición $|yy'| + |y\sqrt{1+y'^2}| = a$ es necesario que $|a^2 - y^2| = a^2 - y^2$, o sea, $y^2 < a^2$; de aquí resulta precisamente que C toma sólo valores positivos.

478. Un recipiente cilíndrico que tiene la altura de 6 m y el diámetro de la base igual a 4 m está puesto verticalmente y llenado de agua. ¿Cuánto tiempo el agua contenida en el recipiente tarda en salir de él por un orificio redondo de 1/12 m de radio practicado en el fondo del mismo?

Resolución. Para resolver el problema planteado hace falta valerse de la fórmula de Bernoulli que determina la velocidad v (en m/s) con la cual un líquido sale de un orificio practicado en el recipiente h m inferior al nivel libre del líquido:

$$v = \sigma\sqrt{2gh}.$$

Aquí $g = 9{,}8$ m/s² es la aceleración de la gravedad, σ es un coeficiente constante (adimensional) que depende de las propiedades de un líquido (para el agua $\sigma \approx 0{,}6$).

Supongamos que, pasados t s después de que el agua comienza a salir, el nivel del agua que en el recipiente sea igual a h m y dentro del tiempo dt descienda más dh m ($dh < 0$). Vamos a calcular el volumen del agua salida durante este intervalo infinitamente pequeño de tiempo dt por dos procedimientos.

Por un lado, este volumen $d\omega$ es igual al volumen de la capa cilíndrica que tiene la altura $|dh|$ y el radio igual al radio r de la base del recipiente ($r = 2$ m). Por lo tanto, $d\omega = \pi r^2 |dh| = -\pi r^2\, dh$.

Por otro lado, este volumen es igual al del cilindro de cuya base sirve el orificio practicado en el fondo del recipiente y cuya altura es igual a $v\,dt$ (donde v es la velocidad de salida del agua). Si el radio del orificio es igual a ρ ($\rho = 1/12$ m), entonces $d\omega = \pi\rho^2 v\,dt = \pi\rho^2\sigma\sqrt{2gh}\,dt$.

Igualando estas dos expresiones, para un mismo volumen, llegamos a la ecuación

$$-r^2\,dh = \sigma\rho^2\sqrt{2gh}\,dt.$$

Separando las variables e integrando, obtenemos

$$dt = -\frac{r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}; \quad t = C - \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

Para $t = 0$ tenemos $h = h_0 = 6$ m. De ello hallamos

$$C = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0}.$$

Ahora bien, la relación entre t y h se determina por la ecuación

$$t = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}(\sqrt{h_0} - \sqrt{h})$$

y el tiempo total de salida T lo encontramos suponiendo en esta fórmula $h = 0$:

$$T = \frac{2r^2 \sqrt{h_0}}{\sigma\rho^2 \sqrt{2g}}.$$

Utilizando los datos del problema ($r = 2$ m, $h_0 = 6$ m, $\sigma = 0{,}6$, $\rho = 1/12$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2), hallamos $T \approx 1062$ s $\approx 17{,}7$ mín.

479. En una habitación en que la temperatura es de 20 °C un cuerpo se ha enfriado durante 20 min desde 100 °C hasta 60 °C. Hallar la ley de refrigeración del cuerpo; ¿dentro de cuántos minutos se enfriará hasta 30 °C? El aumento de la temperatura en la habitación es de despreciar.

Resolución. En virtud de la ley de Newton (la velocidad de refrigeración es proporcional a la diferencia de temperaturas) podemos escribir:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20), \text{ o bien } \frac{dT}{T-20} = k\,dt, \text{ o sea } \ln(T-20) = kt + \ln C.$$

Si $t = 0$, entonces $T = 100°$; de donde $C = 80$. Si $t = 20$, entonces $T = 60°$; por consiguiente, $\ln 40 = 20k + \ln 80$, de donde $k = -(1/20)\ln 2$. De suerte que la ley de refrigeración del cuerpo tiene la forma

$$T - 20 = 80\cdot e^{-(1/20)\,t\cdot\ln 2} = 80\,(1/2)^{t/20}, \text{ o bien } T = 20 + 80\,(1/2)^{t/20}.$$

Para $T = 30°$ tenemos $10 = 80\,(1/2)^{t/20}$, o bien $(1/2)^{t/20} = 1/8$. De este modo, $t/20 = 3$, de donde $t = 60$ min.

480. Determinar el tiempo necesario para que en dos vasos comunicantes se iguale el nivel del líquido. El pequeño orificio entre los vasos tiene el área de ω m^2. Las áreas de secciones horizontales del primer y el segundo vaso constituyen S_1 m^2 y S_2 m^2, en el instante inicial el nivel del líquido en el primer vaso se encontraba a la altura h_1 m a partir del orificio y en el segundo vaso a la altura h_2 m ($h_2 < h_1$).

Resolución. Supongamos que, pasados t s después de que el líquido comience a salir, el nivel del agua en el primer vaso descienda hasta z_1 m y en el segundo vaso ascienda hasta z_2 m. Durante el siguiente infinitamente pequeño intervalo de tiempo dt el nivel del líquido en el primer vaso se rebaja dz_1 m ($dz_1 < 0$) y en el segundo vaso se eleva dz_2 m ($dz_2 > 0$).

Puesto que la disminución del volumen del líquido en el primer vaso es igual a su aumento en el segundo vaso, entonces $S_1 |dz_1| = S_2 |dz_2|$, o bien $-S_1\,dz_1 = S_2\,dz_2$, de donde $dz_2 = -(S_1/S_2)\,dz_1$.

Si se introduce la designación $u = z_1 - z_2$, la velocidad de paso del líquido por el orificio entre los vasos se puede hallar valiéndose de la fórmula $v = \sigma\sqrt{2gu}$; ella se determina por la fórmula de Bernoulli (véase el problema 478) en la cual conviene suponer que el orificio se encuentra a la profundidad $u = z_1 - z_2$ debajo del nivel libre del líquido.

Por eso el volumen del líquido que pasa durante el tiempo dt, el cual es igual conforme a lo dicho anteriormente a $S_1\,dz_1$, es igual también a $v\omega\,dt = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt$. Igualando estas expresiones para un mismo volumen, llegamos a la ecuación

$$-S_1\,dz_1 = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt.$$

Pero $du = dz_1 - dz_2 = dz_1 + (S_1/S_2)\,dz_1$, o sea, $dz_1 = S_2\,du/(S_1 + S_2)$. Sustituyendo la expresión obtenida para dz_1 en la ecuación precedente, encontramos la ecuación diferencial que liga u y t:

$$-\frac{S_1S_2}{S_1+S_2}\,du = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt, \quad \text{o bien} \quad dt = -\frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Integrando, hallamos

$$t = C - \frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{u}.$$

Para $t=0$ tenemos $u = h_1 - h_2$, de donde $C = \dfrac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}$. El tiempo buscando T necesario para igualar los niveles en los vasos lo hallamos, hacieodo $u=0$:

$$T = C = \frac{S_1S_2\sqrt{2(h_1=h_2)}}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}.$$

Resolver las ecuaciones:

481. $\ln\cos y\,dx + x\,\mathrm{tg}\,y\,dy = 0$.

482. $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$; $y(1) = 0$.

483. $3e^x\,\mathrm{tg}\,y\,dx + (1+e^x)\sec^2 y\,dy = 0$; $y(0) = \pi/4$.

484. $e^{1+x^2}\,\mathrm{tg}\,y\,dx - \dfrac{e^{2x}}{x-1}\,du = 0$; $y(1) = \pi/2$.

485. $(1+e^{2x})\,y^2dy = e^x\,dx$; $y(0) = 0$.

486. $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y)$; $y(0) = \pi/4$.

487. $y' = 2^{x-y}$; $y(-3) = -5$.

488. $y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$; $y(-15/16) = e$.

489. $y/y' = \ln y$; $y(2) = 1$.

490. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$.

491. $\dfrac{x\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{y\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

492. $y' + \mathrm{sen}\,(x+y) = \mathrm{sen}\,(x-y)$.

493. $yy' = -2x\sec y$.

494. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$; $y(0) = 0$.

495. $y' = \mathrm{sh}\,(x+y) + \mathrm{sh}\,(x-y)$.

496. $y' = \sqrt{(a^2-y^2)/(a^2-x^2)}$.

497. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0$; $y(1) = 1$.

498. $x(y^6+1)\,dx + y^2(x^4+1)\,dy = 0$; $y(0) = 1$.

499. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})\,dy = 0$.

500. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\mathrm{sen}\,y}} + y' = 0$; $y(\pi/4) = 0$.

501. $y' = \dfrac{\cos y - \mathrm{sen}\,y - 1}{\cos x - \mathrm{sen}\,x + 1}$.

502. $\dfrac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \dfrac{3y+2}{x+1}\,y'$

503. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy = 0$; $y(\pi/4) = \pi/4$.

504. $5e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.

505. Hallar una curva en la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes de coordenadas se divida por la mitad en el punto de tangencia.

506. La velocidad de desvalorización de un equipo debido a su desgaste es proporcional en cada instante dado de tiempo a su precio real. El precio inicial es igual a A_0. Hallar el precio del equipo al expirar t años.

507. Una sustancia se transforma en otra con velocidad proporcional a la cantidad de sustancia no transformada. Es sabido que la cantidad de la primera sustancia es igual a 31,4 g al pasar 1 h y 9,7 g al pasar 3 h. Determinar: 1) cuánta sustancia se tenía al comienzo del proceso; 2) cuánto tiempo pasará después del comienzo del proceso para que quede 1% de substancia primaria.

508. Un recipiente cilíndrico de 6 m de largo y 4 m de diámetro está situado horizontalmente. ¿Cuánto tiempo el agua tardará en salir del recipiente si el orificio de 1/12 m de radio se encuentra al nivel de la generatriz más baja del cilindro?

509. Un embudo cónico con orificio de ω cm² de área y ángulo de 2α al vértice del cono, está lleno con agua hasta el nivel H cm por encima del orificio. Hallar la dependencia existente entre la altura variable del nivel del agua h en el embudo y el tiempo de su salida t. Determinar el tiempo total de su salida. Calcularlo para $\omega = 0,1$ cm², $\alpha = 45°$, $H = 20$ cm.

510. Hallar el tiempo que tarda en salir toda el agua de un embudo cónico, si se sabe que la mitad de esta cantidad sale durante 2 min.

3. **Ecuaciones diferenciales homogéneas.** La ecuación que tiene la forma $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ se llama *homogénea* si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas unidimensionales. La función $f(x, y)$ se denomina *homogénea m-dimensional* si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

La ecuación homogénea puede ser reducida a la forma $y' = f(y/x)$. Con ayuda de la sustitución $y = tx$ una ecuación homogénea se reduce a la ecuación con variables separables respecto a la nueva función incógnita t.

511. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x^2 + 2xy)\, dx + xy\, dy = 0.$$

Resolución. Aquí $P(x, y) = x^2 + 2xy$, $Q(x, y) = xy$. Ambas funciones son homogéneas de segunda dimensión. Introducimos la sustitución $y = tx$, de donde $dy = x\, dt + t\, dx$. Entonces la ecuación tendrá la forma

$$(x^2 + 2x^2t)\, dx + tx^2 (x\, dt + t\, dx) = 0, \quad \text{o bien}$$

$$(x^2 + 2x^2t + t^2x^2)\, dx + tx^3\, dt = 0.$$

Separando las variables e integrando, tenemos

$$\frac{dx}{x} + \frac{t\, dt}{(t+1)^2} = 0; \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{t\, dt}{(t+1)^2} = C.$$

Transformamos la segunda integral:

$$\ln|x|+\int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,dt=C,\quad \text{o bien}\quad \ln|x|+\ln|x+1|+\frac{1}{t+1}=C.$$

Retornando a la función incógnita anterior y ($t=y/x$), obtenemos la respuesta final:

$$\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C.$$

512. Hallar la solución particular de la ecuación $y'=\frac{y}{x}+\operatorname{sen}\frac{y}{x}$, con la condición inicial $y(1)=\pi/2$.

Resolución. Realizamos la sustitución $y/x=t$, de donde $y=tx$, $dy=x\,dt+t\,dx$. Como resultado obtenemos

$$x\,dx+t\,dx=(t+\operatorname{sen}t)\,dx;\quad x\,dt=\operatorname{sen}=t\,dx;\quad \frac{dt}{\operatorname{sen}t}=\frac{dx}{x}.$$

Integrando, tenemos

$\ln|\operatorname{tg}(t/2)|=\ln|x|+\ln C$, de donde $t/2=\operatorname{arctg}(Cx)$.

Efectuando la sustitución inversa $t=y/x$, hallamos la solución general de la ecuación inicial $y=2x\operatorname{arctg}(Cx)$. Utilizando la condición inicial dada, obtendremos $\pi/2=2\operatorname{arctg}C$, de donde $C=1$. De suerte que la solución particular buscada tiene la forma $y=2x\operatorname{arctg}x$.

513. Hallar la curva que pasa por el punto A (0; 1) para la cual el triángulo formado por el eje Oy, la tangente a la curva en su punto arbitrario y el radio vector del punto de tangencia es isósceles (con ello de base de este triángulo sirve el segmento de la tangente comprendido entre el punto de tangencia y el eje Oy).

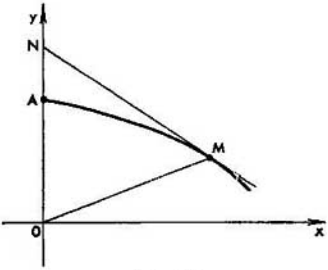

Fig. 33

Resolución. Sea $y=f(x)$ la ecuación buscada de la curva. Trazamos la tangente MN en un punto arbitrario M (x; y) de la curva hasta la intersección con el eje Oy en el punto N (fig. 33). De acuerdo con el enunciado del problema debe cumplirse la igualdad $|ON|=|OM|$. Pero $|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$, y $|ON|$ la hallamos de la ecuación de la tangente $Y-y=y'(X-x)$, haciendo $X=0$, o sea, $Y=|ON|=y-xy'$.

De este modo llegamos a la ecuación homogénea

$$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'.$$

Haciendo $y=tx$, después de la sustitución y la separación de las variables obtendremos

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{dx}{x},\quad \text{o bien}\quad \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)=\ln C-\ln x.$$

de donde

$$x^2 = C\,(C-2y)$$

(una familia de parábolas cuyo eje es Oy).

Sustituyendo las coordenadas del punto A en la solución general hallada, obtendremos $0 = C\,(C-2)$; entre dos valores de $C = 0$ y $C = 2$ es útil solamente el segundo, puesto que para $C = 0$ la parábola se degenera en eje Oy. De suerte que la curva buscada es la parábola

$$x^2 = 4\,(1-y), \quad \text{o bien} \quad y = 1 - x^2/4.$$

514. Hallar la forma de un espejo que haga converger todos los rayos paralelos en un punto.

Resolución. Es evidente que el espejo debe tener la forma de una superficie de revolución cuyo eje sea paralelo a la dirección de los rayos incidentes. Tomamos Ox como este eje y hallamos la ecuación de la curva $y = f\,(x)$ por cuya rotación se forma la superficie buscada.

Llevamos el origen de coordenadas al punto en el cual convergen los rayos reflejados. Designamos el rayo incidente por KM y el rayo reflejado por MO (fig. 34). Trazamos la tangente TT_1 y la normal MN en el punto M a la curva buscada. Entonces el triángulo OMT es isósceles con el vértice en el punto O (puesto que $\widehat{OMT} = \widehat{KMT_1} = \widehat{OTM} = \alpha$). Por consiguiente, $|\,OM\,| = |\,OT\,|$; pero $|\,OM\,| = \sqrt{x^2+y^2}$ y $|\,OT\,|$ lo hallamos de la ecuación de la tangente $Y - y = y'\,(X - x)$, haciendo $Y = 0$; tenemos $X = x - \frac{y}{y'}$, de donde $|\,OT\,| = |\,X\,| = -X = -x + \frac{y}{y'}$.

De este modo, obtenemos la ecuación diferencial

$$\sqrt{x^2+y^2} = -x + \frac{y}{y'}, \quad \text{o bien} \quad (x+\sqrt{x^2+y^2})\,y' = y, \quad \text{o sea},$$

$$(x+\sqrt{x^2+y^2})\,dy - y\,dy = 0.$$

Esta ecuación diferencial es homogénea. Para su integración es racional introducir la sustitución $x = ty$, tomando y por argumento y x (y t) por funciones incógnitas de este argumento. Entonces obtendremos

$$(\sqrt{t^2y^2+y^2} + ty)\,dy - y\,(t\,dy + y\,dt) = 0, \quad \text{o bien} \quad \sqrt{t^2+1}\,dy - y\,dt = 0.$$

Separamos las variables e integramos:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 0; \quad \ln y = \ln\,(t+\sqrt{1+t^2}) + \ln C.$$

De donde $y = C\,(t+\sqrt{1+t^2})$ o retornando a las variables iniciales x e y, tenemos

$$x + \sqrt{x^2+y^2} = \frac{y^2}{C}.$$

Efectuada la simplificación, hallamos la solución final en la forma

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

La curva buscada es una parábola y el espejo tiene la forma de un paraboloide de revolución.

515. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $x = ay^2$ (a es el parámetro de la familia).

Resolución. Se llaman *trayectorias ortogonales* de una familia de curvas a tales curvas de otra familia, cada una de las cuales interseca a cada una de las curvas de la primera familia bajo el ángulo recto.

Si la ecuación de la familia dada es $F(x, y, a) = 0$, entonces para hallar las trayectorias ortogonales hace falta:

1) escribir la ecuación diferencial de la familia dada $f(x, y, y') = 0$;

2) partiendo de la condición de ortogonalidad ($y'_I y''_{II} = -1$), sustituir en esta ecuación diferencial y' por $-1/y'$;

3) integrar la ecuación obtenida $f(x, y, -1/y') = 0$.

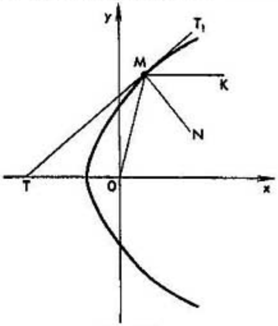

Fig. 34

Para resolver el problema planteado, derivamos la ecuación de la familia dada de parábolas: $1 = 2ayy'$. Eliminando el parámetro de la familia a en las ecuaciones $x = ay^2$ y $1 = 2ayy'$, hallamos la ecuación diferencial de la familia dada de parábolas: $2xy' = y$. Sustituimos y' por $-1/y'$ y obtenemos la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales:

$$2x + yy' = 0, \quad \text{o bien } 2x\,dx + y\,dy = 0.$$

Integrando la ecuación obtenida, hallamos la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales:

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C, \text{ o bien } \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{2C} = 1.$$

De este modo, las trayectorias ortogonales de la familia dada de parábolas son elipses semejantes unas a otras en las cuales el semieje mayor (vertical) supera en $\sqrt{2}$ veces el menor.

Resolver las ecuaciones:

516. $xy' \operatorname{sen}(y/x) + x = y \operatorname{sen}(y/x)$.

517. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\,y'$.

518. $xy' \ln(y/x) = x + y \ln(y/x)$.

519. $xyy' = y^2 + 2x^2$.

520. $xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x)$; $y(1) = \pi/2$.

521. $y' = (y/x) + \cos(y/x)$.

522. $y' = 4 + y/x + (y/x)^2$; $y(1) = 2$.

523. $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$.

524. $y' = (x + y)/(x - y)$.

525. $xy' = xe^{y/x} + y$; $y(1) = 0$.

526. $xy' - y = \dfrac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}$.

527. $(x^4 + 6x^2y^2 + y)\,dx + 4xy\,(x^2 + y^2)\,dy = 0$; $y(1) = 0$.
528. $xy' = 2\,(y - \sqrt{xy})$.
529. $3y \operatorname{sen}(3x/y)\,dx + [y - 3x \operatorname{sen}(3x/y)]\,dy = 0$.
530. Hallar la curva en la cual el producto de la abscisa de todo punto perteneciente a la curva por el segmento truncado por la normal sobre el eje Ox es igual al doble del cuadrado de la distancia entre este punto y el origen de las coordenadas.
531. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $(x-1)^2 + (y-1)^2 = R^2$.

4. Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas. Las ecuaciones que tienen la forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2x + c_2}\right),$$

cuando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ se reducen a homogéneas sustituyendo $x = u + \alpha$ $y = v + \beta$, donde $(\alpha;\ \beta)$ es el punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, la sustitución $a_1x + b_1y = t$ permite separar las variables.

532. Hallar la integral general de la ecuación

$$(2x + y + 1)\,dx + (x + 2y - 1)\,dy = 0.$$

Resolución. La ecuación pertenece al primer tipo, puesto que $y' = -\dfrac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Hallamos el punto de intersección de las rectas $2x + y + 1 = 0$ y $x + 2y - 1 = 0$; tenemos $x = \alpha = -1$; $y = \beta = 1$.

En la ecuación inicial efectuamos la sustitución de las variables haciendo $x = u + \alpha = u - 1$, $y = v + \beta = v + 1$; $dx = du$, $dy = dv$. La ecuación se transforma reduciéndose a la forma

$$(2u + v)\,du + (u + 2v)\,dv = 0.$$

En la ecuación homogénea obtenida hacemos $v = ut$, de donde $dv = u\,dt + t\,du$; llegaremos a la ecuación con variables separables

$$2\,(t^2 + t + 1)\,u\,du + u^2\,(1 + 2t)\,dt = 0$$

cuya integral general es $u\sqrt{t^2 + t + 1} = C$, o bien (efectuadas la sustitución $t = v/u$ y la elevación al cuadrado)

$$u^2 + uv + v^2 = C^2.$$

Retornando a las variables x e y ($u = x + 1$, $v = y - 1$), después de realizar transformaciones elementales, hallamos la integral general de la ecuación inicial

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = C_1$$

(aquí se ha puesto $C_1 = C^2 - 1$).

533. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x + y + 2)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0.$$

Resolución. La ecuación pertenece al segundo tipo, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Por eso hacemos $y + x = t$, $dy = dt - dx$. La ecuación dada adopta la forma

$$(t + 2)\, dx + (2t - 1)\,(dt - dx) = 0, \quad \text{o bien}$$

$$(3 - t)\, dx + (2t - 1)\, dt = 0.$$

Separando las variables e integrando, tenemos

$$\int \frac{2t-1}{3-t}\, dt + \int dx = C, \text{ o bien } -2t - 5 \ln |t - 3| + x = -C.$$

Retornando a las viejas variables ($t = x + y$), obtendremos la respuesta final:

$$x + 2y + 5 \ln |x + y - 3| = C.$$

Resolver las ecuaciones:

534. $2(x + y)\, dy + (3x + 3y - 1)\, dx = 0$; $y(0) = 2$.

535. $(x - 2y + 3)\, dy + (2x + y - 1)\, dx = 0$.

536. $(x - y + 4)\, dy + (x + y - 2)\, dx = 0$.

537. Hallar la curva integral de la ecuación diferencial $y' = (x + y - 2)/(y - x - 4)$, que pasa por el punto $M(1;\, 1)$.

5. Ecuaciones diferenciales exactas. Una ecuación diferencial

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0,$$

donde $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$ se llama *ecuación diferencial exacta*, o sea, el primer miembro de tal ecuación es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$. Si esta ecuación se escribe en la forma $du = 0$, su solución general se determina por la igualdad $u = C$. La función $u(x, y)$ se puede determinar por la fórmula

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy.$$

Con ello en la última fórmula los límites inferiores de las integrales, x_0 e y_0, son arbitrarios; su selección está limitada por una sola condición: las integrales en el segundo miembro de esta fórmula deben tener sentido (o sea, no deben ser integrales impropias divergentes de segundo género). Si la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ no se cumple, entonces en algunos casos se puede reducir la ecuación en examen al tipo indicado, multiplicándola por el así llamado *actor integrante* que, en el caso general, es la función de x e y $\mu(x, y)$. Si en la ecuación dada existe un factor integrante que depende sólo de x, este factor se determina por la fórmula

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) / Q\, dx},$$

donde la relación $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q$ debe ser función sólo de x. Análogamente, el actor integrante que depende solamente de y se determina por la fórmula

$$\mu = e^{-\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) / P\, dy},$$

donde $\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)/P$ debe ser función sólo de y (la ausencia de y, en el primer caso, y de x, en el segundo caso, en estas relaciones es el criterio de existencia del factor integrante del tipo examinado).

538. Hallar la integral general de la ecuación

$$(e^x + y + \operatorname{sen} y)\, dx + (e^y + x + x \cos y)\, dy = 0.$$

Resolución. Aquí $P(x, y) = e^x + y + \operatorname{sen} y$, $Q(x, y) = e^y + x + x\cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$. Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, o sea,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y.$$

Integramos $\frac{u}{x}$ con respecto a x:

$$u=\int (e^x+y+\operatorname{sen} y)\, dx+C(y)=e^x+xy+x\operatorname{sen} y+C(y).$$

Hallamos la función $C(y)$, derivando la última expresión respecto a y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+C'(y).$$

Obtenemos la ecuación

$$x + x\cos y + C'(y) = x + x\cos y + e^y,$$

de donde encontramos $C'(y) = e^y$, o sea $C(y) = e^y$. De este modo, la integral general de la ecuación tiene la forma

$$e^x + xy + x\operatorname{sen} y + e^y = C.$$

539. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x + y - 1)\, dx + (e^y + x)\, dy = 0.$$

Resolución. Aquí $P(x, y) = x + y - 1$, $Q(x, y) = e^y + x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$; por lo tanto, la condición de la diferencial total está cumplida, o sea, la ecuación dada es una ecuación diferencial exacta.

Determinemos la integral general por la fórmula

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy=C.$$

Tomando $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, obtendremos

$$\int_0^x (x+y+1)\, dx+\int_0^y e^y\, dy=C_1, \text{ o bien } \left[\frac{1}{2}x^2+xy-x\right]_0^x+e^y\Big|_0^y=C_1.$$

Sustituyendo los límites, encontramos

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y-1=C_1, \text{ o bien } e^y+\frac{1}{2}x^2+xy-x=C,$$

donde $C = C_1 + 1$.

540. Hallar la integral general de la ecuación
$(x\cos y - y \operatorname{sen} y)\, dy + (x \operatorname{sen} y + y\cos y)\, dx = 0.$

Resolución. Tenemos

$$P(x, y) = x \operatorname{sen} y + y\cos y, \quad Q(x, y) = x\cos y - y \operatorname{sen} y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Big/ Q = \frac{x\cos y - y \operatorname{sen} y}{x\cos y - y \operatorname{sen} y} = 1.$$

Por eso la ecuación dada tiene un factor integrante que depende solamente de x. Determinemos este factor integrante:

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q\, dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

Multiplicando la ecuación inicial por e^x, obtenemos la ecuación

$$e^x (x\cos y - y \operatorname{sen} y)\, dy + e^x (x \operatorname{sen} y + y\cos y)\, dx = 0$$

la cual, como es fácil convencerse, es ya una ecuación diferencial exacta; en efecto, tenemos $P_1(x, y) = e^x (x \operatorname{sen} y + y\cos y)$, $Q_1(x, y) = e^x (x\cos y - y \operatorname{sen} y)$. De ello

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^x (x \operatorname{sen} y + y\cos y)\right] = e^x (x\cos y + \cos y - y \operatorname{sen} y);$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^x (x\cos y - y \operatorname{sen} y)\right] = e^x \left[x\cos y - y \operatorname{sen} y + \cos y\right].$$

Estas derivadas son iguales y, por consiguiente, el primer miembro de la ecuación obtenida es igual a $du(x, y)$.

De este modo, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x (x\cos y - y \operatorname{sen} y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x (x \operatorname{sen} y + y\cos y).$$

Integrando la primera de estas igualdades respecto a y, hallamos

$$u = \int e^x (x\cos y - y \operatorname{sen} y)\, dy + C(x) = xe^x \operatorname{sen} y + e^x y\cos y - e^x \operatorname{sen} y + C(x).$$

Hallamos la derivada de la función obtenida con respecto a x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y + ex^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + e^x y\cos y + C'(x) =$$
$$= e^x (x \operatorname{sen} y + y\cos y) + C'(x).$$

Comparando el valor obtenido de $\frac{\partial u}{\partial x}$ con $P(x, y)$, obtenemos $C'(x) = 0$, o sea, $C(x) = 0$. Por consiguiente, la integral general de la ecuación inicial tiene la forma

$$u(x, y) = xe^x \cdot \operatorname{sen} y + e^x y \cdot \cos y - e^x \cdot \operatorname{sen} y = C, \quad \text{o bien}$$
$$e^x (x \operatorname{sen} y + y\cos y - \operatorname{sen} y) = C.$$

Resolver las ecuaciones:

541. $(x + \operatorname{sen} y)\, dx + (x\cos y + \operatorname{sen} y)\, du = 0.$

542. $(y + e^x \operatorname{sen} y)\, dx + (x + e^x \cos y)\, dy = 0.$

543. $(xy + \operatorname{sen} y)\,dx + (0{,}5x^2 + x\cos y)\,dy = 0.$
544. $(x^2 + y^2 + y)\,dx + (2xy + x + e^y)\,dy = 0;\ y(0) = 0.$
545. $(2xye^{x^2} + \ln y)\,dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0;\ y(0) = 1.$
546. $[\operatorname{sen} y + (1 - y)\cos x]\,dx + [(1 + x)\cos y - \operatorname{sen} x]\,dy = 0.$
547. $(y + x\ln y)\,dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0.$
548. $(x^2 + \operatorname{sen} y)\,dx + (1 + x\cos y)\,dy = 0.$
549. $ye^x\,dx + (y + e^x)\,dy = 0.$
550. $(e^x \operatorname{sen} y + x)\,dx + (e^x \cos y + y)\,dy = 0.$
551. $(\ln y - 5y^2 \operatorname{sen} 5x)\,dx + \left(\frac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)dy = 0;\ y(0) =$ $= e.$
552. $(\operatorname{arcsen} x + 2xy)\,dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)\,dy = 0.$
553. $(3x^2y + \operatorname{sen} x)\,dx + (x^3 - \cos y)\,dy = 0.$
554. $(e^{x+y} + 3x^2)\,dx + (e^{x+y} + 4y^3)\,dy = 0;\ y(0) = 0.$
555. $(\operatorname{tg} y - y\operatorname{cosec}^2 x)\,dx + (\operatorname{ctg} x + x\sec^2 y)\,dy = 0.$
556. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right)dx + \left(e^y - x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0.$

Integrar las siguientes ecuaciones que tienen un factor integrante que depende sólo de x o de y:
557. $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0\ (\mu = \varphi(x)).$
558. $(x^2\cos x - y)\,dx + x\,dy = 0\ (\mu = \varphi(x)).$
559. $y\,dx - (x + y^2)\,dy = 0\ (\mu = \varphi(y)).$
560. $y\sqrt{1-y^2}\,dx + (x\sqrt{1-y^2} + y)\,dy = 0 \quad (\mu = \varphi(y)).$

561. Demostrar que la ecuación $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, la cual es simultáneamente homogénea y ecuación diferencial exacta, tiene la integral general $Px + Qy = C$.

Indicación: valerse del teorema de Euler sobre funciones homogéneas conforme al cual

$$x\cdot\frac{\partial P}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = tP(x, y),$$

donde t es el índice de homogeneidad de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$.

6. **Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Ecuaciones de Bernoulli.** La ecuación de la forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

se llama *lineal* (y e y' entran en primeros grados sin multiplicarse entre sí). Si $Q(x) \not\equiv 0$, la ecuación se llama lineal *no homogénea* y si $Q(x) \equiv 0$, lineal *homogénea*.

La solución general de una ecuación homogénea lineal $y' + P(x)\,y = 0$ se obtiene fácilmente separando las variables

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx; \quad \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx; \quad \ln y = -\int P(x)\,dx + \ln C,$$

o bien, finalmente

$$y=Ce^{-\int P(x)\,dx},$$

donde C es una constante arbitraria.

La solución general de una ecuación lineal no homogénea se puede hallar partiendo de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente con ayuda del *método de Lagrange*, haciendo variar la constante arbitraria, o sea, suponiendo $y = C(x)e^{-\int P(dx)dx}$, donde $C(x)$ es cierta función derivable de x que debe ser definida.

Para hallar $C(x)$ es necesario sustituir y en la ecuación inicial lo que conduce a la ecuación

$$C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}=Q(x).$$

De aquí,

$$C(x)=\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx+C,$$

donde C es una constante arbitraria. Entonces la solución general buscada de la ecuación no homogénea tiene la forma

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx+C\right].$$

Las ecuaciones lineales de primer orden se pueden integrar también por el *método de Bernoulli* que consiste en lo siguiente. Con ayuda de la sustitución $y = uv$, donde u y v son dos funciones desconocidas, la ecuación inicial se transforma reduciéndose a la forma

$$u'v+uv'+P(x)\,uv=Q(x),\quad \text{o bien}\quad u\,[v'+P(x)\,v]+vu'=Q(x).$$

Valiéndose del hecho de que una de las funciones desconocidas, (por ejemplo, v) puede ser elegida arbitrariamente (puesto que sólo el producto uv debe satisfacer la ecuación inicial), por v se toma una *solución particular cualquiera* de la ecuación $v' + P(x)\,v = 0$ (por ejemplo, $v = e^{-\int P(x)\,dx}$ que anula, por consiguiente, el coeficiente de u en la última ecuación. Entonces la ecuación precedente se reduce a la ecuación

$$vu'=Q(x),\quad \text{o bien}\quad u'=\frac{Q(x)}{v}=Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx},$$

de donde

$$u=C+\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx.$$

La solución general de la ecuación inicial se halla multiplicando u por v:

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx+C\right].$$

La ecuación (no lineal) de la forma

$$y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^m,$$

donde $m \neq 0$, $m \neq 1$, se llama *ecuación de Bernoulli*. Puede ser transformada en ecuación lineal, reemplazando la función desconocida con ayuda de la sustitución $z = y^{1-m}$ debido a la cual la ecuación inicial se reduce a la forma

$$\frac{1}{1-m} z' + P(x) z = Q(x).$$

Al integrar ecuaciones concretas de Bernoulli no hace falta transformarlas previamente en lineales sino aplicar directamente el método de Bernoulli o el de variación de la constante arbitraria.

562. Integrar la ecuación $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, con la condición inicial $y(0) = 0$.

Resolución. Integramos la ecuación homogénea $y' \cos^2 x + y = 0$; separando las variables, obtendremos

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0, \quad \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C, \quad y = Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Buscamos la solución de la ecuación inicial no homogénea en la forma $y = C(x) e^{-\operatorname{tg} x}$, donde $C(x)$ es la función desconocida. Sustituyendo en la ecuación inicial $y = C(x) e^{-\operatorname{tg} x}$ e $y' = C'(x) e^{-\operatorname{tg} x} - C(x) e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x$, llegamos a la ecuación

$$\cos^2 x\, C'(x) e^{-\operatorname{tg} x} - C(x) e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x \cos^2 x + C(x) e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x.$$

o bien

$$C'(x) \cos^2 x\, e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x,$$

de donde

$$C(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1) + C.$$

De este modo, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Utilizando la condición inicial $y(0) = 0$, hallamos $0 = -1 + C$, de donde $C = 1$. Por consiguiente, la solución particular buscada tiene la forma

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}.$$

563. Integrar la ecuación $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$.

Resolución. Es una ecuación lineal. La resolvemos por el método de Bernoulli. Haciendo $y = uv$, tenemos

$$u'v + v'u - uv \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x, \quad \text{o bien} \quad u(v' = v \operatorname{th} x) + u'v = \operatorname{ch}^2 x.$$

Hacemos $v' - v \operatorname{th} x = 0$, de donde $\frac{dv}{v} = \operatorname{th} x\, dx$; integrando, hallamos $\ln v = \ln \operatorname{ch} x$, o bien $v = \operatorname{ch} x$ (no introducimos la constante de integración, ya que es suficiente hallar una solución particular cualquiera de esta ecuación auxiliar).

Para determinar u tenemos la ecuación $u'v = \operatorname{ch}^2 x$ o $u' \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 x$, de donde hallamos $u = \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$. Multiplicando u por v, logramos la solución general

$$y = \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + C).$$

564. Integrar la ecuación

$$y'+\frac{xy}{1-x^2}=\operatorname{arcsen} x+x.$$

Resolución. Integramos la ecuación homogénea respectiva:

$$y'+\frac{xy}{1-x^2}=0;\quad \frac{dy}{y}=-\frac{x\,dx}{1-x^2};\quad \ln y=\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+\ln C,$$

o sea, $y=C\sqrt{1-x^2}$. Ahora hacemos $y=C(x)\sqrt{1-x^2}$; entonces

$$y'=C'(x)\sqrt{1-x^2}-\frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Efectuada la sustitución en la ecuación inicial no homogénea, obtenemos

$$C'(x)\sqrt{1-x^2}-\frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{1-x^2}C(x)\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,sen} x+x,$$

o sea,

$$C'(x)=\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrando, hallamos

$$C(x)=\int\left[\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2-\sqrt{1-x^2}+C,$$

De este modo, la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2-\sqrt{1-x^2}+C\right].$$

565. Resolver la ecuación $x'+\frac{y}{x}=x^2y^4$.

Resolución. Es una ecuación de Bernoulli. La integramos por el método de variación de la constante arbitraria. Para esto integramos primeramente la ecuación homogénea lineal correspondiente $y'+\frac{y}{x}=0$ cuya solución es $y=\frac{c}{x}$.

Buscamos la solución de la ecuación inicial de Bernoulli, haciendo $y=\frac{C(x)}{x}$, $y'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}$. La sustitución de y e y' en la ecuación inicial ofrece:

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4,\quad \text{o bien}\quad \frac{C'(x)}{x}=\frac{[C(x)]^4}{x^2}.$$

Integramos la ecuación obtenida:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4}=\frac{dx}{x};\quad -\frac{1}{3[C(x)]^3}=\ln x-\ln C;\quad C(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{3\ln(C/x)}}.$$

De esto modo, la solución general de la ecuación inicial es

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C/x)}}.$$

566. Integrar la ecuación

$$y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x.$$

Resolución. Es también una ecuación de Bernoulli. La integramos por el método de Bernoulli, para lo cual hacemos $y=uv$. Sustituyendo en la ecuación inicial $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, agrupemos los términos que contienen u en el primer grado:

$$u'v+u\left(v'-\frac{2xv}{1+x^2}\right)=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x.$$

Tomemos por v una solución particular cualquiera de la ecuación

$$v'-\frac{2xv}{1+x^2}=0.$$

Separando en ella las variables, hallamos

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x\,dx}{1+x^2};\quad \ln v=\ln(1+x^2);\quad v=1+x^2$$

(no introducimos la constante de integración).

Para hallar u tenemos la ecuación

$$u'v=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x,$$

o bien (puesto que $v=1+x^2$)

$$u'=\frac{4\sqrt{u}\operatorname{arctg}x}{1+x^2}.$$

Separamos las variables e integramos:

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx;\quad \sqrt{u}=\operatorname{arctg}^2x+C.$$

Ahora bien, $u=(\operatorname{arctg}^2x+C)^2$ e $y=uv=(1+x^2)(\operatorname{arctg}^2x+C)^2$ es la solución general de la ecuación inicial.

567. Integrar la ecuación $y=xy'+y'\ln y$.

Resolución. Esta ecuación se puede integrar fácilmente, si se cambian de papel x e y: tomando por argumento y y por la función desconocida x. Para esto hace falta solamente (utilizando la fórmula de derivación de la función inversa) poner $y'_x=1/x'_y$. Entonces la ecuación dada se transforma en la siguiente:

$$yx'_y=x+\ln y.$$

Esto es una ecuación lineal respecto a x. Integramos la ecuación homogénea respectiva $yx'=x$; tenemos

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y};\quad x=Cy.$$

Buscamos la solución de la ecuación inicial no homogénea, haciendo $x = C(y)\,y$, de donde $x'_y = C'(y)\,y + C(y)$. La sustitución en la ecuación da

$$C'(y)\,y^2 + C(y)\,y = C(y)\,y + \ln y, \quad \text{de donde} \quad C'(y) = \frac{\ln y}{y^2},$$

$$C(y) = C - \frac{1 + \ln y}{y}.$$

Multiplicando $C(y)$ por y, hallamos la solución de la ecuación inicial

$$x = Cy - 1 - \ln y.$$

568. Integrar la ecuación $(x^2 \ln y - x)\,y' = y$.

Resolución. Esta ecuación se puede integrar con ayuda de la misma transformación que la precedente. Tomando y por argumento y x por función desconocida, reducimos esta ecuación a la forma

$$x^2 \ln y - x = yx', \quad \text{o bien} \quad yx' + x = x^2 \ln y.$$

Esta es una ecuación de Bernoulli con respecto a x. Integrando la ecuación homogénea lineal respectiva $yx' + x = 0$, hallamos $x = C/y$.

Tomamos en la ecuación inicial $x = \frac{C(y)}{y}$, de donde $x' = \frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2}$; llegamos a la ecuación siguiente para determinar $C(y)$:

$$C'(y)\frac{}{}\!\!\!\;\; \frac{C'(y)}{y}\text{—}$$

$$\frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2} + \frac{C(y)}{y^2} = \frac{[C(y)]^2}{y^2}\ln y, \quad \text{o bien} \quad C'(y) = \frac{[C(y)]^2 \ln y}{y^2}.$$

Separamos las variables e integramos:

$$\frac{dC(y)}{[C(y)]^2} = \frac{\ln y}{y^2}\,dy; \quad -\frac{1}{C(y)} = C - \frac{\ln y + 1}{y}; \quad C(y) = \frac{y}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Multiplicando $C(y)$ por $1/y$, hallamos la solución general de la ecuación inicial:

$$x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Resolver las ecuaciones:

569. $xy' - y = x^2 \cos x$.

570. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

571. $y' \cos x + y = 1 - \operatorname{sen} x$.

572. $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$; $y(1) = 0$.

573. $(1 + x^2)\,y' + y = \operatorname{arctg} x$.

574. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \operatorname{arcsen} x$; $y(0) = 0$.

575. $y' - \frac{y}{\operatorname{sen} x} = \cos^2 x \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

576. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$; $y(e) = e^2/2$.

577. $y' \operatorname{sen} x - y \cos x = 1$; $y(\pi/2) = 0$.

578. $y'(x + y^2) = y$.

Indicación: tomar x por función desconocida.

579. $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \operatorname{sen} 6x;\ \ y(0) = 1/3.$

580. $(2xy + 3)\, dy - y^2\, dx = 0.$

Indicación: tomar x por función desconocida.

581. $(y^4 + 2x)\, y' = y.$

Indicación: tomar x por función desconocida.

582. $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2y^{4/3}.$

583. $x' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$

584. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

585. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

586. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y};\ \ y(0) = 9/4.$

587. $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\operatorname{sen} x;\ \ \ y(0) = 1.$

588. $y\, dx + (x + x^2y^2)\, dy = 0.$

Indicación: tomar x por función desconocida.

589. $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \operatorname{sen}^2 x = 0.$

590. $(y^2 + 2y + x^2)\, y' + 2x = 0;\ y(1) = 0.$

Indicación: tomar x por función desconocida.

7. Ecuaciones de la forma $x = \varphi(y')$ e $y = \varphi(y')$. Estas ecuaciones se integran fácilmente en forma paramétrica si se hace $y' = p$ y se toma p por parámetro, con cuya ayuda conviene expresar tanto x como y. En efecto, haciendo $y' = p$ en la ecuación $x = \varphi(y')$, inmediatamente obtenemos la expresión para x por medio del parámetro p : $x = \varphi(p)$. De aquí, derivando, encontramos $dx = \varphi'(p)\, dp$, pero, puesto que $dy = y'\, dx = p\, dx$, entonces, por consiguiente, $dy = p\varphi'(p)\, dp$, e y se determina por la integración: $y = \int p\varphi'(p)\, dp + C$.

De este modo, la solución de la ecuación $x = \varphi(y')$ se escribe en la forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int p\varphi'(p)\, dp + C. \end{cases}$$

Análogamente, tomando $y' = p$ en la ecuación $y = \varphi(y')$, hallamos $y = \varphi(p)$. Derivando y, obtenemos $dy = \varphi'(p)\, dp$. Pero, como antes, $dy = p\, dx$. Por lo tanto, $p\, dx = \varphi'(p)\, dp$, de donde $dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p}$ y encontramos x por la integración: $x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C$. La solución genera de la ecuación $y = \varphi(y')$ tiene la forma

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)\, dp}{p} + C, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

Si esto se logra, en ambos casos se puede eliminar el parámetro p y hallar la integral general de la ecuación.

591. Integrar la ecuación $x = y' \operatorname{sen} y' + \cos y'$.

Resolución. Hacemos $y' = p$. Entonces $x = p \operatorname{sen} p + \cos p$. Derivaremos esta igualdad:

$$dx = (\operatorname{sen} p + p \cos p - \operatorname{sen} p)\, dp = p \cos p\, dp$$

y sustituimos la expresión para dx en la igualdad $dy = p\, dx$:

$$dy = p^2 \cos p\, dp,$$

o sea,

$$y = \int p^2 \cos p\, dp = (p^2 - 2) \operatorname{sen} p + 2p \cos p + C.$$

De este modo, la solución general en la forma paramétrica tiene el aspecto

$$\begin{cases} x = p \operatorname{sen} p + \cos p, \\ y = (p^2 - 2) \operatorname{sen} p + 2p \cos p + C. \end{cases}$$

592. Integrar la ecuación $y' = \operatorname{arctg} (y/y'^2)$.

Resolución. Hallamos previamente $y = y'^2 \operatorname{tg} y'$. Tomamos $y' = p$; entonces $y = p^2 \operatorname{tg} p$. Derivamos esta igualdad: $dy = (2p \operatorname{tg} p + p^2 \sec^2 p)\, dp$ y, reemplazando dy por $p\, dx$, obtenemos $p\, dx = p\, (2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp$, de donde, simplificando p e integrando, hallamos

$$x = \int (2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp = p \operatorname{tg} p - \ln \cos p + C.$$

La solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$\begin{cases} y = p^2 \operatorname{tg} p, \\ x = p \operatorname{tg} p - \ln \cos p + C. \end{cases}$$

593. Integrar la ecuación $x = y' + \ln y'$.

Resolución. Pongamos $y' = p$. Por lo tanto, $x = p + \ln p$; derivando, encontramos $dx = dp + \frac{dp}{p}$. Como $dy = p\, dx$, entonces

$$dy = p \left(dp + \frac{dp}{p} \right) = (p + 1)\, dp.$$

Integrando, hallamos

$$y = \frac{1}{2} (p + 1)^2 + C.$$

La solución general de la ecuación dada escrita en la forma paramétrica reviste el aspecto

$$\begin{cases} x = p + \ln p, \\ y = \frac{1}{2} (p = 1)^2 + C. \end{cases}$$

Aquí el parámetro p es fácil eliminarlo; de la segunda igualdad obtenemos $p = \sqrt{2 (y - C)} - 1$ ($p > 0$ y por eso delante de la raiz hace falta poner el signo «+»). Sustituyendo la expresión encontrada para p en la primera igualdad, hallamos la solución general de la ecuación en la forma siguiente:

$$x=\sqrt{2(y-C)}-1+\ln[\sqrt{2(y-C)}-1].$$

Resolver las ecuaciones:

594. $\arcsen(x/y')=y'$.
595. $y=e^{y'}(y'-1)$.
596. $x=2(\ln y'-y')$.
597. $y(1+y'^2)^{1/2}=y'$.
598. $x=2y'+3y'^2$.
599. $x=y'(1+e^{y'})$.
600. $x=e^{2y'}(2y'^2-2y'+1)$.
601. $y=y'\ln y'$.

8. Ecuaciones de Lagrange y de Clairaut. Se llama ecuación de Lagrange a una ecuación diferencial de primer orden, lineal respecto a x e y, de cuyos coeficientes sirven las funciones de y':

$$P(y')x+Q(y')y+R(y')=0.$$

La ecuación de Lagrange se integra del modo siguiente. Vamos a resolverla respecto a y y tomamos como parámetro y', haciendo $y'=p$:

$$y=xf(p)+\varphi(p).$$

Aquí se introducen las designaciones $f(y')=-P(y')/Q(y')$, $\varphi(y')=-R(y')/Q(y')$]. Derivando la ecuación obtenida y sustituyendo en el primer miembro dy por $p\,dx$, llegamos a la ecuación

$$p\,dx=f(p)\,dx+xf'(p)\,dp+\varphi'(p)\,dp.$$

La ecuación obtenida es lineal con respecto a x (como función de p) y por eso puede ser integrada. Si su solución es $x=F(p,\ C)$, entonces la solución general de la ecuación inicial de Lagrange se escribirá en la forma

$$\begin{cases} x=F(p,\ C), \\ y=xf(p)+\varphi(p)=F(p,\ C)f(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

Se llama *ecuación de Clairaut* a la ecuación que tiene la forma

$$y=xy'+\varphi(y'),$$

es un caso particular de la ecuación de Lagrange. Integrándola por el procedimiento indicado, es fácil obtener la solución general $y=Cx+\varphi(C)$ la cual define una familia de rectas sobre un plano.

No obstante, la ecuación de Clairaut, además de la solución general, tiene aún una solución singular definida por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x=-\varphi'(p), \\ y=-p\varphi'(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

La solución singular de una ecuación de Clairaut (ella existe si $\varphi'(p)\neq$ const) es la envolvente de una familia de rectas determinadas por la solución general (en otras palabras, *de solución general de la ecuación de Clairaut sirve la familia de tangentes para la solución singular*).

Una ecuación de Lagrange también puede tener soluciones singulares, con ello las soluciones singulares de esta ecuación (si ellas existen) son las tangentes comunes a todas las curvas integrales definidas por la solución general.

602. Integrar la ecuación $y = xy' - e^{y'}$.

Resolución. Esta es una ecuación de Clairaut. Hacemos $y' = p$ y escribimos la ecuación en la forma $y = px - e^p$. La derivamos, $dy = p\,dx + x\,dp - e^p\,dp$; pero $dy = p\,dx$, por eso la última ecuación adopta la forma $x\,dp - e^p\,dp = 0$, o bien $(x - e^p)\,dp = 0$. Por lo tanto, o $dp = 0$, o bien $x = e^p$. Si se hace $dp = 0$, entonces $p = C$; sustituyendo este valor de p en la igualdad $y = px - e^p$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y = Cx - e^C.$$

Si hacemos $x = e^p$, entonces $y = pe^p - e^p\ (p - 1)\,e^p$ y llegamos a la solución singular de la ecuación inicial

$$\begin{cases} x = e^p, \\ y = (p-1)\,e^p. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro p (en el caso dado $p = \ln x$), hallamos la solución singular en la forma explícita:

$$y = x\,(\ln x - 1).$$

Verifiquemos que el conjunto de rectas determinadas por la solución general es una familia de tangentes a la curva integral singular.

Derivando la solución singular, hallamos $y' = \ln x$. La ecuación de la tangente a la curva integral singular en el punto $M\ (x_0;\ y_0)$ [donde $y_0 = x_0 \times (\ln x_0 - 1)$] se escribirá en la forma

$$y - y_0 = y_0'\,(x - x_0), \quad \text{o bien} \quad y - x_0\,(\ln x_0 - 1) = \ln x_0\,(x - x_0),$$

lo que, efectuada la simplificación, resulta $y = x \ln x_0 - x_0$. Si aquí se pone $\ln x_0 = C$, la ecuación de la familia de tangentes a la curva integral singular tendrá la forma $y = Cx - e^C$ que es lo que se necesitaba demostrar.

603. Integrar la ecuación $y = xy'^2 + y'^2$.

Resolución. Esta es una ecuación de Lagrange. Procedemos análogamente al ejercicio anterior, o sea, hacemos $y' = p$, entonces $y = xp^2 + p^2$. Derivamos la última igualdad: $dy = p^2\,dx + 2px\,dp + 2p\,dp$. Efectuando la sustitución $dy = p\,dx$, llegamos a la ecuación $p\,dx = p^2\,dx + 2px\,dp + 2p\,dp$. De aquí, simplificando p, obtenemos la ecuación con variables separables

$$(1-p)\,dx = 2\,(x+1)\,dp, \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}.$$

Integrándola, encontramos

$$\ln (x + 1) = -2 \ln |\,1 - p\,| + \ln C; \quad x + 1 = C/(p - 1)^2.$$

Utilizando la ecuación dada $y = p^2\,(x + 1)$, obtenemos

$$y = Cp^2/(1 - p^2).$$

La simplificación de p efectuada, puede provocar (y en este caso provocó la pérdida de la solución singular; haciendo $p = 0$, de la ecuación dada hallamos $y = 0$; esto es una solución singular.

De suerte que

$$\begin{cases} x+1 = C/(p-1)^2, \\ y = Cp^2/(p-1)^2 \end{cases} \text{es la solución general; } y=0 \text{ es la solución particular.}$$

En la solución general el parámetro p se puede eliminar y reducir a la forma $(\sqrt{y} + \sqrt{x+1})^2 = C$.

Resolver las ecuaciones:

604. $y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2 y'^2}$.

605. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

606. $y = xy' + y' - y'^2$.

607. $y = x\left(\frac{1}{x} + y'\right) + y'^2$.

608. $2y(y' + 1) = xy'^2$.

§ 2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores

1. Coceptos básicos. Se llama *ecuación diferencial de n-ésimo orden* a la que tiene la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

De solución de tal ecuación sirve toda función n veces derivable $y = \varphi(x)$ que convierte la ecuación dada en identidad, o sea,

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)] = 0.$$

El problema de Cauchy para esta ecuación consiste en hallar una solución tal que satisfaga las condiciones: $y = y_0$, $y' = y_0'$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ para $x = x_0$, donde x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ son números dados, llamados *datos* o *condiciones iniciales*.

La función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ se denomina *solución general* de la ecuación diferencial de n-ésimo orden dada si, escogidas respectivamente las constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_n$, esta función es la solución de todo problema de Cauchy planteado para la ecuación dada.

Cualquier solución obtenida a partir de la solución general para valores concretos de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (en particular, toda solución del problema de Cauchy) se llama solución particular de esta ecuación. Para separar del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial una solución particular determinada se utilizan, a veces, las llamadas condiciones de contorno. Estas condiciones (cuyo número no debe superar el orden de la ecuación) no se dan en un punto sino en los extremos de cierto intervalo. Es evidente que las condiciones de contorno se ponen solamente para las ecuaciones cuyo orden es superior al primero.

La integración de las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden se logra efectuar solamente en algunos casos particulares.

2. Ecuación de la forma $y^{(n)} = f(x)$. La solución de esta ecuación se encuentra integrando n veces, a saber:

$$y^{(n)} = f(x), \quad y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]\,dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

. . . .

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

donde

$$f_n(x)=\underbrace{\iiint\ldots\int}_{n\text{ veces}} f(x)\,dx^n.$$

Puesto que $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$, ... son constantes, la solución general se puede escribir también así:

$$y=f_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

609. Hallar la solución particular de la ecuación $y''=xe^{-x}$ que satisface las condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Resolución. Hallemos la solución general por integración sucesiva de la ecuación dada:

$$y'=\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1,$$

$$y=\int[-xe^{-x}-e^{-x}+C_1]\,dx=xe^{-x}+2e^{-x}+C_1x+C_2,$$

o bien

$$y=(x+2)\,e^{-x}+C_1x+C_2.$$

Valgámonos de las condiciones iniciales: $1=2+C_2$; $C_2=-1$; $0=-1+C_1$; $C_1=1$. Por consiguiente, la solución particular buscada tiene la forma

$$y=(x+2)\,e^{-x}+x-1.$$

Esta misma solución se puede hallar también del modo siguiente, utilizando las condiciones iniciales dadas:

$$y'=y'(0)+\int_0^x xe^{-x}\,dx=[-xe^{-x}-e^{-x}]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1;$$

$$y=y(0)+\int_0^x[-xe^{-x}-e^{-x}+1]\,dx=1+[(x+2)\,e^{-x}+x]_0^x=(x+2)\,e^{-x}+x-1.$$

Resolver las ecuaciones:

610. $y^{IV}=\cos^2 x$; $y(0)=1/32$; $y'(0)=0$, $y''(0)=1/8$, $y'''(0)=0$.

611. $y'''=x\operatorname{sen}x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

612. $y'''\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}2x$.

613. $y''=2\operatorname{sen}x\cos^2 x-\operatorname{sen}^3 x$.

614. $y'''=xe^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

3. Ecuaciones diferenciales de la forma $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)})=0$ que no contienen la función buscada. El orden de tal ecuación se puede reducir, tomando por nueva función desconocida la inferior entre las derivadas de la ecuación dada, o sea, haciendo $y^{(k)}=z$. Entonces obtenemos la ecuación

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)})=0.$$

De este modo, el orden de la ecuación se reduce en k unidades.

615. Hallar la ecuación general de la ecuación $xy'' = y' \ln (y'/x)$.

Resolución. Haciendo $y' = z$, reducimos la ecuación a la forma

$$xz' = z \ln (z/x), \quad \text{o bien} \quad z' = (z/x) \ln (z/x).$$

Esta es una ecuación homogénea de primer orden. Tomando $z/x = t$, de donde $z = tx$, $z' = t'x + t$, obtenemos la ecuación

$$t' x + t = t \ln t, \quad \text{o bien} \quad \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, hallamos

$$\ln (\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1, \quad \text{o bien} \quad \ln t - 1 = C_1 x,$$

de donde $t = e^{1+C_1x}$; retornando a la variable y, llegamos a la ecuación $y' = xe^{1+C_1x}$. Por consiguiente,

$$y = \int xe^{1+C_1x}\, dx = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1x} + C_2.$$

616. Un cuerpo de masa m se deja caer por la vertical desde cierta altura sin poseer ninguna velocidad inicial. Durante la caída el cuerpo experimenta la resistencia del aire la cual es proporcional al cuadrado de la velociddad del cuerpo. Hallar la ley de movimiento del cuerpo.

Resolución. Introducimos las designaciones siguientes: s, el camino recorrido por el cuerpo; $v = \frac{ds}{dt}$, su velocidad; $w = \frac{d^2s}{dt^2}$, su aceleración. Sobre el cuerpo actúan estas fuerzas: su peso $P = mg$ (en el sentido de su movimiento) y la resistencia del aire $F = kv^2 = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ (en el sentido contrario a su movimiento).

Basándonos en la segunda ley de Newton, llegamos a la siguiente ecuación diferencial del movimiento del cuerpo:

$$mw = P - kv^2, \quad \text{o bien} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Valgámonos de las condiciones iniciales: si $t=0$, entonces $s=0$, $v=\frac{ds}{dt}=0$. Sustituyendo $\frac{ds}{dt}$ por v, reescribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2,$$

de donde, haciendo $\frac{mg}{k} = a^2$, tenemos $\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}\,dt$. Integrando, hallamos ($v \leqslant a$):

$$\frac{1}{2a} \ln \frac{a+v}{a-v} = \frac{k}{m} t + C_1.$$

Si $t=0$, entonces $v=0$, de donde $C_1=0$. Por lo tanto,

$$\ln = \frac{a+v}{a-v} = \frac{2ak}{m} t.$$

De ello

$$v = a\frac{e^{2akt/m} - 1}{e^{2akt/m} + 1} = a\frac{e^{akt/m} - e^{-akt/m}}{e^{akt/m} + e^{-akt/m}} = a\, th\, (akt/m).$$

Pero $\frac{ak}{m}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{k}{m}=\sqrt{\frac{kg}{m}}$; sustituyendo v por $\frac{ds}{dt}$, obtenemos para determinar s la ecuación

$$\frac{ds}{dt}=a\,\text{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t,$$

de donde, integrando, hallamos

$$s=\sqrt{\frac{m}{kg}}\,a\ln\text{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t+C_2=\frac{m}{k}\ln\text{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t+C_2.$$

Puesto que $s=0$ para $t=0$, tenemos $C_2=0$.

De suerte que la ley de caída de un cuerpo al cual se opone la resistencia del aire, es proporcional al cuadrado de su velocidad y se describe por la fórmula

$$s=\frac{m}{k}\ln\text{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t$$

y la velocidad de movimiento, por la fórmula $v=a\,\text{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t$. Aquí $a=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ es útil señalar que la velocidad de movimiento no crece ilimitadamente, ya que $\lim\limits_{t\to\infty} v=a=\sqrt{\frac{P}{k}}$ (puesto que $\lim\limits_{t\to\infty}\text{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t=1$), donde P es el peso del cuerpo; además, prácticamente la velocidad de caída alcanza su valor límite con mucha rapidez, distinguiéndose de éste en una magnitud muy pequeña. Precisamente un cuadro así se observa en la práctica cuando se ejecuta un salto en paracaídas de apertura retardada desde gran altura.

Resolver las ecuaciones:

617. $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1)$; $\quad y(2)=1,\ y'(2)=-1$.

618. $(1-x^2)\,y''-xy'=2$.

619. $2xy'''y''=y''^2-a^2$.

620. $(1+x^2)\,y''+1+y'^2=0$.

621. $y'''(x-1)-y''=0$; $y(2)=2$; $y'(2)=1$, $y''(2)=1$.

4. Ecuaciones diferenciales de la forma F $(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ sin variable independiente. La ecuación de esta forma admite la reducción del orden, si se pone $y'=z$ y por nuevo argumento se toma el mismo y. En este caso y'', y''', ... se expresarán con ayuda de las fórmulas (que se deducen según la regla de derivación de la función compuesta) $y''=z\frac{dz}{dy}$, $y'''=z\left[z\frac{d^2z}{d^2y}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]$, ... por z y las derivadas de z con respecto a y, además, el orden de la ecuación se reducirá en una unidad.

622. Resolver la ecuación $1+y'^2=yy''$.

Resolución. Hacemos $y'=z$, $y''=z\frac{dz}{dy}$. La ecuación toma la forma $1+z^2=yz\frac{dz}{dy}$; o sea, una ecuación de primer orden con respecto a z, con variables separables. Separamos las variables e integramos:

$$\frac{z\,dz}{1+z^2}=\frac{dy}{y}; \quad \ln(1+z^2)=2\ln y+2\ln C_1; \quad 1+z^2=$$
$$=C_1^2 y^2; \quad z=\pm\sqrt{C_1^2 y^2-1}.$$

De aquí, retornando a la variable y, tenemos:

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2 y^2-1}, \qquad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2-1}}=\pm dx,$$
$$\frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 y+\sqrt{C_1^2 y^2-1}\right)=\pm(x+C_2),$$

o bien,

$$y=\frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1}+e^{\mp(x+C_2)C_1}\right)=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch} C_1(x+C_2)-C_1^*\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1^*}.$$

622a. Hallar la primera integral (o sea, y') de la ecuación $y''=$ $=b\operatorname{sen} y-ky'^2$ que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0)=0$ e $y'(0)=0$.

Resolución. Pongamos $y'^2=z$, $2y'y''=z'=y'\cdot\frac{dz}{dy}$, o sea, $y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dy}$. La ecuación tomará la forma $\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dy}=b\operatorname{sen} y-kz$. Es una ecuación lineal de primer orden respecto a z: $\frac{dz}{dy}+2kz=2b\operatorname{sen} y$. Resolviéndola por el método de Bernoulli, o sea, haciendo la sustitución $z=uv$, obtendremos

$$u\frac{dv}{dy}+v\left(\frac{du}{dy}+2ku\right)=2b\operatorname{sen} y, \qquad \frac{du}{dy}+2ku=0,$$
$$u=e^{-2ky} \quad \text{y} \quad dv=2b\operatorname{sen} y\cdot e^{2ky}\,dy.$$

Integrando, encontramos

$$v=\frac{2b}{1+4k^2}e^{2ky}(2k\operatorname{sen} y-\cos y)+C.$$
$$z=uv+Ce^{-2ky}+\frac{2b}{1+4k^2}(2k\operatorname{sen} y-\cos y)=y'^2.$$

Utilicemos las condiciones iniciales y determinemos: $C-\frac{2b}{1+4k^2}=0$, o sea, $C=\frac{2b}{1+4k^2}$.

Por consiguiente, la primera integral buscada tiene la forma

$$y'=\pm\sqrt{\frac{2b}{1+4k^2}\left(e^{-2ky}+2k\operatorname{sen} y-\cos y\right)}.$$

623. Hallar la curva en la cual el radio de curvatura es igual al cubo de la normal; la curva buscada debe pasar por el punto $M(0;1)$ y tener en este punto una tangente que forme con el eje Ox un ángulo de 45°.

Resolución. Puesto que el radio de curvatura de la curva plana se expresa por la fórmula $R = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$ y la longitud de la normal $N = y\sqrt{1 + y'^2}$, entonces la ecuación diferencial del problema tendrá la forma

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=(y\sqrt{1+y'^2})^3.$$

De ello, reduciendo en $(1 + y'^2)^{3/2}$, llegamos a la ecuación $y''\cdot y^3 = 1$.

Tomando $y' = z$, $y'' = z\cdot\frac{dz}{dy}$, obtenemos para z la ecuación $z\cdot\frac{dz}{dy}\cdot y^3 = 1$. Integrándola, hallamos

$$z\,dz = y^{-3}\cdot dy, \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}y^{-2} + \frac{1}{2}C_1, \quad \text{o sea,} \quad z^2 = C_1 - y^{-2};$$

retornando a la variable y, llegamos a la ecuación $y'^2 = C_1 - y^{-2}$.

La constante arbitraria C_1 la hallamos partiendo de la condición de que la tangente en el punto M (0, 1) forme con el eje Ox un ángulo de 45°, o sea, tg 45° $= y'_M| = 1$, o bien $y'(0) = 1$. Por consiguiente, $1 = C_1 - 1$, o sea, $C_1 = 2$.

Ahora bien, para determinar y se ha obtenido la ecuación de primer orden $y'^2 = 2 - y^{-2}$, de donde $y' = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$; separamos las variables e integramos:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{2y^2-1}}=dx;\ \frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=x+\frac{1}{2}C_2;\ y^2=\frac{1}{2}[(x+C_2)^2+1].$$

Encontramos la constante arbitraria C_2 partiendo de la condición de que la curva pase por el punto M (0; 1), o sea, $1 = \frac{1}{2}[(2\cdot 0 + C_2)^2 + 1]$; $C_2 = 1$. Por lo tanto, la curva buscada se define por la ecuación

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

Resolver las ecuaciones:

624. $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$.
625. $yy'' - y'^2 = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
626. $a^2y''^2 = 1 + y'^2$.
627. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.
628. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.
629. $y''(1 + y) = y'^2 + y'$.
630. $y'' = y'/\sqrt{y}$.

5. Ecuaciones de la forma F $(y, y, y', y'', \dots, y^{(n)} = 0)$ homogéneas con respecto a $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. La ecuación de la forma indicada admite la reducción del orden en una unidad al sustituir $y'/y = z$, donde z es la nueva función desconocida.

631. Resolver la ecuación $3y'^2 = 4yy'' + y^2$.

Resolución. Dividimos ambos miembros de la ecuación por y^2:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2-4\cdot\frac{y''}{y}=1.$$

Hacemos $\frac{y'}{y}=z$, de donde $\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}=z'$, o bien, $\frac{y''}{y}=z'+z^2$. Como resultado obtenemos la ecuación

$$3z^2-4z^2-4z'=1, \quad \text{o bien} \quad -4z'=1+z^2, \quad \text{o sea,} \quad \frac{dz}{1+z^2}=-\frac{1}{4}\,dx\,.$$

De ello, integrando, hallamos

$$\operatorname{arctg} z=C_1-\frac{1}{4}x, \quad \text{o bien} \quad z=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{4}\right), \quad \text{o} \quad \frac{y'}{y}=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{y}\right).$$

Integrando la última ecuación, obtenemos

$$\ln y=4\ln\cos\left(C_1-\frac{x}{4}\right)+\ln C_2, \quad \text{o bien} \quad y=C_2\cdot\cos^4\left(C_1-\frac{x}{4}\right).$$

632. Resolver la ecuación $y'^2+yy''=yy'$.

Resolución. Aunque esta ecuación pertenece al tipo precedente, ella puede ser integrada por un procedimiento más sencillo. En la misma el primer miembro es $(yy')'$ en virtud de lo cual la ecuación toma la forma $(yy')'=yy'$, o bien $\frac{d(yy')}{yy'}=dx$. De aquí

$$\ln(yy')=x+\ln C_1, \quad \text{o bien} \quad yy'=C_1e^x, \quad \text{o sea,} \quad y\,dy=C_1e^x\,dx.$$

Integrando, encontramos la respuesta definitiva:

$$y^2/2=C_1e^x+C_2.$$

Resolver las ecuaciones:

633. $yy''-y'^2=0$.

634. $(y+y')\,y''+y'^2=0$.

635. $2xy'''y''=y''^2-a^2$.

636. $y''=y'e^y$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

636a. Hallar la primera integral (o sea y') de la ecuación $2yy''=ky-y'^2$ que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Indicación: efectuar la sustitución $y'^2=z$.

637. Hallar la curva si la proyección del radio de curvatura sobre el eje Oy es constante e igual a a y el eje Ox es tangente a la curva buscada en el origen de las coordenadas.

638. Hallar la curva en la cual el radio de curvatura en un punto cualquiera es igual a $\sec\alpha$, donde α es el ángulo formado por la tangente en el punto respectivo con el eje Ox. La curva buscada pasa por el punto $M(0;\,1)$ y la tangente a la curva en este punto es paralela al eje Ox.

639. Un cuerpo en el instante inicial se encontraba en un líquido, se sumerge en éste accionado por su propio peso sin poseer ninguna velocidad inicial. La resistencia que opone el líquido es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo. Hallar la ley de movimiento del cuerpo si su masa es igual a m.

§ 3 Ecuaciones lineales de órdenes superiores

1. Conceptos básicos. Se llama *ecuación diferencial de n-ésimo orden* a la que tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x). \quad (1)$$

Aquí las funciones $a_1(x)$, $a_2(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$ y $f(x)$ están definidas y son continuas en cierto intervalo $]a, b[$.

La ecuación (1) se llama lineal *no homogénea*, o sea, ecuación *con segundo miembro*. Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación se denomina lineal *homogénea*. La ecuación lineal que tiene el primer miembro igual a la dada no homogénea, se llama *correspondiente a esta última*.

Conociendo una solución particular y_1 de la ecuación lineal homogénea, se puede, mediante la sustitución lineal de la función buscada $y = y_1 \cdot \int z\,dx$, reducir su orden y, por consiguiente, el orden de la ecuación no homogénea correspondiente, en una unidad. La ecuación obtenida de orden $(n-1)$ con respecto a z también es lineal.

640. Se da la ecuación $y''' + \frac{2}{x}y'' - y' + \frac{1}{x\ln x}y = x$ y se conoce la solución particular $y_1 = \ln x$ de la ecuación homogénea correspondiente. Reducir el orden de la ecuación.

Resolución. Valgámonos de la sustitución $y = \ln x \cdot \int z\,dx$, donde z es la nueva función incógnita. Entonces sustituyendo las derivadas correspondientes

$$y' = \frac{1}{x}\int z\,dx + z\ln x, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}\int z\,dx + \frac{2z}{x} + z'\ln x,$$

$$y''' = \frac{2}{x^3}\int z\,dx - \frac{3z}{x^2} + \frac{3z'}{x} + z''\ln x$$

en la ecuación dada, obtenemos la ecuación de segundo orden

$$z''\ln x + \frac{2\ln x + 3}{3}\cdot z' + \left(\frac{1}{x^2} - \ln x\right)z = x.$$

Nota. Señalemos que al efectuar la sustitución indicada en la ecuación lineal de segundo orden y teniendo en cuenta que la ecuación lineal de primer orden se integra en cuadraturas, se puede integrar en cuadraturas toda ecuación lineal de segundo orden si se conoce una solución particular de la ecuación homogénea correspondiente.

641. Integrar la ecuación $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ que tiene la solución particular $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Resolución. Realizamos la sustitución $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\int z\,dx$; entonces

$$y' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\cdot\int z\,dx + \frac{\operatorname{sen} x}{x}z,$$

$$y'' = \frac{\operatorname{sen} x}{x}z' + \frac{2(x\cos x - \operatorname{sen} x)}{x^2}\cdot z - \frac{(x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x}{x^3}\cdot\int z\,dx.$$

Obtenemos la ecuación

$$\operatorname{sen} x\cdot z'+2\cos x\cdot z=0, \quad \text{o sea,} \quad z=\frac{C_1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Por consiguiente,

$$y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\int\frac{C_1\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}(C_2-C_1\operatorname{ctg} x)=C_2\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}-C_1\frac{\cos x}{x}.$$

642. Reducir el orden e integrar la ecuación $y''\operatorname{sen}^2 x=2y$ que tiene la solución particular $y=\operatorname{ctg} x$.

643. La ecuación $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=0$ tiene la solución particular $y=x$. Reducir el orden e integrar esta ecuación.

644. La ecuación $y''+(\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x)\,y'+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot y=0$ tiene la solución particular $y=\operatorname{sen} x$. Reducir el orden e integrar esta ecuación.

2. Ecuaciones homogéneas lineales. Una de las propiedades destacables de las ecuaciones lineales consiste en que la solución general de tales ecuaciones se puede hallar a partir de un número de sus soluciones particulares. Enunciemos el teorema sobre la estructura de la solución general de una ecuación lineal homogénea.

Teorema. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+a_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)\,y=0,$$

entonces $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ es la solución general de esta ecuación ($C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias).

Nota. Las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ se llaman *linealmente independientes en el intervalo* $]a, b[$ si no están ligadas por ninguna identidad

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n=0,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son cualesquiera arbitrarias, distintas de cero simultáneamente. Para el caso de dos funciones esta condición se puede enunciar también así: dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes si su relación no es una constante: $y_1/y_2\neq\text{const}$. Por ejemplo: 1) $y_1=x$; $y_2=x^2$ son linealmente independientes; 2) $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ son linealmente independientes; 3) $y_1=2e^{3x}$, $y_2=5e^{3x}$ son linealmente dependientes.

La condición suficiente de independencia lineal de n funciones, continuas junto con sus derivadas hasta el orden $(n-1)$ en el intervalo $]a, b[$, es la de que el determinante de Wronski (*wronskiano*) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ de estas funciones no sea igual a cero en ningún punto del intervalo $]a, b[$, o bien

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots\, y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots\, y_n'(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots\, y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Si las n funciones dadas son soluciones particulares de una ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden, esta condición (no anulación) no es sólo suficiente sino también necesaria de independencia lineal de estas n soluciones.

El wronskiano de n soluciones de una ecuación homogénea lineal de n-ésimo orden

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y=0$$

está ligado al primer coeficiente $a_1(x)$ de esta ecuación *por la fórmula de Liouville-Ostrogradski*:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\,|_{x=x_0}\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}.$$

El conjunto de n soluciones de una ecuación homogénea lineal de n-ésimo orden, definidas y linealmente independientes en el intervalo $]a, b[$, se llama *sistema fundamental* de soluciones de esta ecuación.

Para una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden

$$y''+a_1(x)\,y'+a_2(x)\,y=0$$

el sistema fundamental consta de dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ e $y_2(x)$; su solución general se determina por la fórmula

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Si para tal ecuación se conoce una solución particular $y_1(x)$, su segunda solución, linealmente independiente con la primera, se puede determinar por la fórmula (que es una colorario de la fórmula de Liouville-Ostrogradski)

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx.$$

Esto brinda la posibilidad de integrar inmediatamente ecuaciones homogéneas lineales de segundo orden, para las cuales se conoce una solución particular, sin recurrir a la reducción de sus órdenes

Así, en el problema 641 para la ecuación $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ se conoce la solución $y_1(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Hallemos por la fórmula citada anteriormente la segunda solución:

$$y_2(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\int\frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}\,dx=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Por eso la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y=C_1\frac{\operatorname{sen} x}{x}-C_2\frac{\cos x}{x}.$$

Recomendamos al lector resolver por este procedimiento los problemas 642-644.

645. Mostrar que $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación $y''-9y=0$.

Resolución. Efectuando la sustitución en la ecuación, es fácil cerciorarse de que las funciones $y_1=e^{3x}ey_2=e^{-3x}$ son sus soluciones. Estas soluciones particulares son linealmente independientes, ya que $y_1/y_2=e^{3x}/e^{-3x}=e^{6x}\neq$ const, por eso constituyen un sistema fundamental de soluciones y, en consecuencia, $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ es la solución general.

646. Se da la ecuación $y''' - y' = 0$. ¿Constituyen el sistema fundamental de soluciones las funciones e^x, e^{-x}, ch x que son, como es fácil de comprobar, las soluciones de esta ecuación?

Resolución. Para comprobar la independencia lineal de estas ecuaciones calculamos el wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{sh} x \\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix}.$$

Este determinante es igual a cero, puesto que los elementos de las primera y tercera filas son iguales.

Por consiguiente, las funciones dadas son linealmente dependientes y por eso no se puede escribir la solución general basándose en estas soluciones particulares. El mismo resultado se puede obtener con más rapidez, puesto que ch $x = (e^x + e^{-x})/2$ y, por consiguiente, estas tres funciones son linealmente dependientes.

647. A la ecuación $y'' - y = 0$ la satisfacen dos soluciones particulares $y_1 = \operatorname{sh} x$, $y_2 = \operatorname{ch} x$. ¿Constituyen ellas un sistema fundamental?

648. ¿Se puede escribir la solución general de la ecuación $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$ $(x \neq 0)$ por sus dos soluciones particulares $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{sen} x$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos x$?

649. ¿Son linealmente independientes las funciones $x + 1$, $2x + 1$, $x + 2$?

650. Responder a la misma pregunta con respecto a las funciones $2x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x + 2$.

651. Responder a igual pregunta con respecto a las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt{x + a}$, $\sqrt{x + 2a}$.

652. Responder a esta pregunta, para las funciones $\ln (2x)$, $\ln (3x)$, $\ln (4x)$.

3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Se llama *ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes* a una ecuación que tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son ciertos números reales. Para hallar las soluciones particulares de la ecuación (1) se escribe la *ecuación característica*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \tag{2}$$

la cual se obtiene de la ecuación (1) sustituyendo en ella las derivadas de la función buscada por grados correspondientes de k, además, la propia función se reemplaza por la unidad. La función (2) es una ecuación de n-ésimo grado y tiene n raíces (reales o complejas, entre las cuales pueden haber también iguales).

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (1) se construye según el carácter de las raíces de la ecuación (2):

1) a cada raíz real simple k le corresponde en la solución general el sumando de la forma Ce^{kx};

2) a cada raíz real de orden de multiplicidad m le corresponde en la solución general el sumando de la forma $(C_1 + C_2x + \ldots + C_mx^{m-1})\, e^{kx}$;

3) a cada par de raíces simples conjugadas complejas $k^{(1)} = \alpha + \beta i$ y $k^{(2)} = \alpha - \beta i$ le corresponde en la solución general el sumando de la forma $e^{\alpha x}\,(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$;

4) a cada par de raíces conjugadas complejas $k^{(1)} = \alpha + \beta i$ y $k^{(2)} = \alpha - \beta i$ de orden de multiplicidad m le corresponde en la solución general el sumando de la forma

$$e^{\alpha x}\,[(C_1 + C_2x + \ldots + C_{m-1}x^{m-1}) \cos \beta x] +$$
$$+ [(C_1' + C_2'x + \ldots + C_{m-1}'x^{m-1}) \operatorname{sen} \beta x].$$

653. Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Resolución. Escribimos la ecuación característica $k^2 - 7k + 6 = 0$; sus raíces son $k_1 = 6$; $k_2 = 1$. Por consiguiente, e^{6x} y e^x son soluciones particulares linealmente independientes y la solución general tiene la forma

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^x.$$

654. Hallar la solución general de la ecuación $y^{\mathrm{IV}} - 13y'' + 36y = 0$.

Resolución. La solución característica tiene la forma $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$; sus raíces son $k_{1,2} = \pm 3$, $k_{3,4} = \pm 2$, les corresponden las soluciones particulares linealmente independientes e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x} y e^{-2x}. Por lo tanto, la solución general

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}.$$

655. Hallar la solución de la ecuación $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$ que satisface las condiciones iniciales: $x = 0$, $\dot{x} = 3$ para $t = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - k - 2 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Por lo tanto, la solución general es $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}$. Sustituyendo las condiciones iniciales en la solución general y su derivada, obtendremos un sistema de ecuaciones con respecto a C_1 y C_2:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 3 = 2C_1 - C_2, \end{cases}$$

de donde $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. De suerte que la solución que satisface las condiciones iniciales dadas tiene la forma $y = e^{2t} - e^{-t}$.

656. Hallar la solución de la ecuación $\ddot{x} - 2\dot{x} = 0$ que satisface las condiciones de contorno: $x = 0$ para $t = 0$ y $x = 3$ para $t = \ln 2$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 2k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Por consiguiente, la solución general se escribe en la forma $x = C_1 + C_2e^{2t}$. Sustituyendo las condiciones de contorno en la solución general hallada, obtenemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2e^{2\ln 2} = 3, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + 4C_2 = 3. \end{cases}$$

De donde $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. De suerte que $x = e^{2t} - 1$ es la solución particular buscada que satisface las condiciones de contorno dadas.

657. Hallar la solución general de la ecuación $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^3 - 2k^2 + k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 1$. Aquí 1 es raíz doble y por eso de soluciones particulares linealmente independientes sirven 1, e^x, xe^x. La solución general tiene la forma

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x.$$

658. Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 4k + 13 = 0$ tiene las raíces $k = 2 \pm 3i$. Las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas y por eso les corresponden las soluciones particulares $e^{2x} \cos 3x$ y e^{2x} sen $3x$. Por consiguiente, la solución general es

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

659 Un punto material de masa m se mueve por el eje Ox bajo la acción de la fuerza de recuperación orientada hacia el origen de las coordenadas y proporcional a la distancia del punto en movimiento al origen; el medio en que ocurre el movimiento opone al movimiento del punto una resistencia proporcional a la velocidad con que éste avanza. Hallar la ley del movimiento.

Resolución. Sea $\dot{x}$ la velocidad del punto; $\ddot{x}$, su aceleración. Sobre el punto actúan dos fuerzas: la de recuperación $f_1 = -ax$ y la de resistencia del medio $f_2 = -b\dot{x}$. De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - ax, \quad \text{o bien} \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + ax = 0.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Su ecuación característica $mk^2 + bk + a = 0$ tiene las raíces

$$k_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ma})/(2m).$$

1) Si $b^2 - 4ma > 0$, entonces las raíces son reales, diferentes y ambas negativas; introduciendo para ellas las designaciones

$$k_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ma})/(2m) = -r_1, \quad k_2 = -(b + \sqrt{b^2 - 4ma})/2m = -r_2,$$

hallamos la solución general de la ecuación de movimiento en la forma

$$x = C_1e^{-r_1t} + C_2e^{-r_2t}$$

(es el caso del llamado movimiento *aperiódico*).

2) Si $b^2 - 4ma = 0$, entonces las raíces de la ecuación característica son reales e iguales:

$$k_1 = k_2 = -b/(2m) = -r.$$

En este caso la solución general de la ecuación de movimiento tiene la forma

$$x = (C_1 + C_2t)\, e^{-rt},$$

3) Por último, si $b^2 - 4ma < 0$, entonces la ecuación característica tiene las raíces complejas conjugadas:

$$k_1 = -\alpha + \beta i, \quad k_2 = -\alpha - \beta i,$$

donde

$$\alpha = b/(2m), \quad \beta = (\sqrt{4am - b^2})/(2m).$$

La solución general de la ecuación de movimiento tiene la forma

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t) \quad \text{o bien} \quad x = A e^{-\alpha t} \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0),$$

donde

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{sen} \varphi_0 = C_1/A, \quad \cos \varphi_0 = C_2/A$$

(oscilaciones amortiguadas).

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

660. $y'' - y' - 2y = 0.$

661. $y'' + 25y = 0.$

662. $y'' - y' = 0.$

663. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

664. $y^{\text{IV}} - 2y''' + y'' = 0.$

665. $y^{\text{IV}} + a^4 y = 0.$

666. $y^{\text{IV}} + 5y'' + 4y = 0.$

Hallar las soluciones de las ecuaciones, que satisfacen las condiciones dadas iniciales o de contorno:

667. $y'' + 5y' + 6y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -6.$

668. $y'' - 10y' + 25y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

669. $y'' - 2y' + 10y = 0;\ y(\pi/6) = 0,\ y'(\pi/6) = e^{\pi/6}.$

670. $9y'' + y = 0;\ y(3\pi/2) = 2,\ y'(3\pi/2) = 0.$

671. $y'' + 3y' = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

672. $y'' + 9y = 0;\ y(0) = 0,\ y(\pi/4) = 1.$

673. $y'' + y = 0;\ y'(0) = 1;\ y'(\pi/3) = 0.$

674. Resolver el problema 659 si la fuerza de resistencia del medio es igual a cero.

4. Ecuaciones lineales no homogéneas. La estructura de la solución general de una ecuación lineal no homogénea, o sea, de una ecuación con segundo miembro:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x),$$

se define según el teorema siguiente.

Si $u = u(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, entonces la solución general de la ecuación lineal no homogénea tiene la forma $y = u + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$; en otras palabras, la solución general de la ecuación no homogénea es igual a la suma de una solución particular cualquiera de ésta y de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

Por consiguiente, para construir la solución general de una ecuación no homogénea hace falta hallar una solución particular de ésta (suponiendo ya conocida la solución general de la ecuación homogénea correspondiente).

Examinemos dos métodos para encontrar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea.

Método de variación de las constantes arbitrarias. Este método se emplea para buscar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden, ya sea con coeficientes variables o constantes, si se conoce la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

El método de variación consiste en lo siguiente. Sea conocido el sistema fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación homogénea correspondiente. Entonces la solución general de la ecuación no homogénea conviene buscarla en la forma

$$u(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n,$$

donde las funciones $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ se determinan por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \dots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \dots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

[$f(x)$ es el segundo miembro de la ecuación].

Para la ecuación de segundo orden $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$ el sistema correspondiente tiene la forma

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

La solución de este sistema se halla por las fórmulas

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)}; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)},$$

en virtud de lo cual $u(x)$ se puede determinar directamente por la fórmula

$$u(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)}.$$

Aquí $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de las soluciones y_1 e y_2.

Supongamos, por ejemplo, que se requiere integrar la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}.$$

Para la ecuación homogénea correspondiente hemos encontrado soluciones particulares $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ (véase la pág. 160); su wronskiano $W(y_1, y_2) = -\frac{1}{x^2}$.

Por eso $u(x)$ se puede hallar por la fórmula

$$u(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \int \frac{\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{x}}{(-1/x^2)}\, dx + \frac{\cos x}{x} \int \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{x}}{(-1/x^2)}\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx - \frac{\cos x}{x} \cdot \int \cos x\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} [\ln | \operatorname{tg}(x/2) | + \cos x] - \frac{\cos x}{x} \cdot \operatorname{sen} x.$$

De este modo, $u(x) = \frac{\operatorname{sen} x \ln | \operatorname{tg}(x/2) |}{x}$, y la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2 \cdot \frac{\cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \ln | \operatorname{tg}(x/2) |.$$

Nota. Una vez más prestemos atención al hecho de que una ecuación lineal no homogénea de segundo orden puede ser integrada en cuadraturas si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente; la solución general de tal ecuación tiene la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2 + u(x)$, donde y se determina por y_1 con ayuda de la fórmula

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

y $u(x)$ se determina mediante y_1 e y_2 valiéndose de la fórmula citada anteriormente.

Método de selección de una solución particular (*método de los coeficientes indeterminados*). Este método es aplicable solamente a las ecuaciones lineales de coeficientes constantes y sólo cuando su segundo miembro tiene la forma siguiente:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x]$$

(o es la suma de funciones de tal tipo). Aquí α y β son constantes, $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de x de grados n y m, respectivamente.

La solución particular de la ecuación de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = f(x),$$

donde $f(x)$ tiene la forma indicada y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son coeficientes reales constantes) conviene buscarla en la forma

$$u(x) = x^re^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x].$$

Aquí r es igual al índice de multiplicidad de la raíz $\alpha + \beta i$ en la ecuación característica $k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (si la ecuación característica no tiene una raíz así, hay que tomar $r = 0$); $P_l(x)$ y $Q_l(x)$ son polinomios completos de x de grado l con coeficientes indeterminados, con ello l es igual al mayor entre los números n y m ($l = n \geqslant m$, o bien $l = m \geqslant n$):

$$P_l(x) = A_0x^l + A_1x^{l-1} + \ldots + A_l;$$
$$Q_l(x) = B_0x^l + B_1x^{l-1} + \ldots + B_l.$$

Cabe subrayar que los polinomios $P_l(x)$ y $Q_l(x)$ deben ser completos (o sea, contener todas las potencias de x a partir del cero hasta l) con coeficientes indefinidos diferentes para las mismas potencias de x en ambos polinomios y en este caso, si de la expresión de la función $f(x)$ forma parte al menos una de las funciones $\cos\beta x$ o $\mathrm{sen}\,\beta x$, entonces en $u(x)$ es necesario introducir siempre ambas funciones.

Los coeficientes indeterminados pueden encontrarse del sistema de ecuaciones algebraicas lineales que se obtienen por la identificación de los coeficientes de términos semejantes en los miembros primero y segundo de la ecuación inicial, después de sustituir en ella $u(x)$ en lugar de y.

La comprobación de la validez de la forma escogida de la solución particular ofrece la posibilidad de comparar todos los términos del segundo miembro de la ecuación con los términos semejantes a ellos en el primer miembro, aparecidos en éste después de la sustitución de $u(x)$.

Si el segundo miembro de la ecuación inicial es igual a la suma de algunas funciones diferentes de la estructura examinada, entonces, para buscar la solución particular de esta ecuación hace falta utilizar el *teorema de superposición de soluciones*: hay que hallar las soluciones particulares correspondientes a los sumandos del segundo miembro, tomados por separado, y tomar la suma de ellas, que es precisamente la solución particular de la ecuación inicial (o sea, de la ecuación con la suma de las funciones correspondientes en el segundo miembro).

Nota. Los casos particulares de la función $f(x)$ de la estructura examinada (con la presencia de las cuales en el segundo miembro de la ecuación es aplicable el método de selección de una solución particular) son las funciones siguientes:

1) $f(x) = Ae^{\alpha x}$, A es constante $\{\alpha + \beta i = \alpha\}$.
2) $f(x) = A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x$, A y B son constantes $\{\alpha + \beta i = \beta i\}$.
3) $f(x) = P_n(x)$ (un polinomio de grado n) $\{\alpha + \beta i = 0\}$.
4) $f(x) = P_n(x)\,e^{\alpha x}$ $\{\alpha + \beta i = \alpha\}$.
5) $f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x$ $\{\alpha + \beta i = \beta i\}$.
6) $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x)$, A y B son constantes.

675. Hallar una solución particular de la ecuación $y'' = 2y' - 3y = e^{4x}$ que satisfaga las condiciones de contorno $y|_{x=\ln 2} = 1$; $y|_{x=2\ln 2} = 1$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 2k - 3 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. La solución particular de la ecuación inicial conviene buscarla en la forma $u = Ae^{4x}$ (puesto que en el segundo miembro no hay seno ni coseno, de coeficiente de la función exponencial sirve el polinomio de grado nulo, o sea, $l = n = 0$, y $r = 0$, ya que $\alpha = 4$ no es una raíz de la ecuación característica).

Por lo tanto,

$$\begin{array}{c|r|l} & -3 & u = Ae^{4x} \\ + & -2 & u' = 4Ae^{4x} \\ & 1 & u'' = 16Ae^{4x} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u'' - 2u' - 3u = 5Ae^{4x} \equiv e^{4x}.} \end{array}$$

De este modo, $A = 1/5$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación dada

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Para hallar C_1 y C_2 valgámonos de las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} C_1e^{3\ln 2} + C_2e^{-\ln 2} + \frac{1}{5}e^{4\ln 2} = 1, \\ C_1e^{6\ln 2} + C_2e^{-2\ln 2} + \frac{1}{5}e^{8\ln 2} = 1. \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 8C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{16}{5} = 1. \\ 64C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{256}{5} = 1. \end{cases}$$

De aquí, $C_1 = -491/600$, $C_2 = 652/75$. De suerte que

$$y = \frac{1}{5}e^{4x} + \frac{652}{75}e^{-x} - \frac{491}{600}e^{3x}.$$

676. Integrar la ecuación $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x$, para las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + k - 2 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 1$, $k_2 = -2$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$. La solución particular de la ecuación no homogénea hay que buscarla en la forma de

$$u = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$$

[en el caso dado $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta i = i$; puesto que en la ecuación característica no hay una raíz así, entonces $r = 0$; $m = n = 0$ y, por consiguiente, también $l = 0$].

Por lo tanto,

$$\begin{array}{r|r|l} & -2 & u = \quad A\cos x + B\,\text{sen}\,x \\ + & 1 & u' = -A\,\text{sen}\,x + B\cos x \\ & 1 & u'' = -A\cos x - B\,\text{sen}\,x \\ \hline \end{array}$$

$$u'' + u' - 2u = (B - 3A)\cos x + (-3B - A)\,\text{sen}\,x \equiv \cos x - 3\,\text{sen}\,x.$$

De este modo, tenemos el sistema

$$\begin{cases} B - 3A = 1, \\ 3B + A = 3, \end{cases} \quad \text{o sea,} \quad A = 0,\ B = 1.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + \text{sen}\,x.$$

Hallamos C_1 y C_2, utilizando las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} C_1\cdot e^0 + C_2\cdot e^0 + \text{sen}\,0 = 1, \\ -2C_1 e^0 + C_2 e^0 + \cos 0 = 2, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -2C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

De aquí $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, o sea, $y = e^x + \text{sen}\,x$.

677. Integrar la ecuación $y'' - y' = \text{ch}\,2x$, siendo las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. La solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 + C_2 e^x$. La solución particular de la ecuación no homogénea en este caso se puede buscar en la forma de $u = A\,\text{ch}\,2x + B\,\text{sh}\,2x$. Derivando y sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos:

$$\begin{array}{r|r|l} & 0 & u = A\,\text{ch}\,2x + B\,\text{sh}\,2x \\ + & -1 & u' = 2A\,\text{sh}\,2x + 2B\,\text{ch}\,2x \\ & 1 & u'' = 4A\,\text{ch}\,2x + 4B\,\text{sh}\,2x \\ \hline \end{array}$$

$$u'' - u' = (4A - 2B)\,\text{ch}\,2x + (4B - 2A)\,\text{sh}\,2x \equiv \text{ch}\,2x.$$

De este modo,

$$\begin{cases} 4A - 2B = 1 \\ -2A + 4B = 0; \end{cases} \quad A = 1/3, \quad B = 1/6$$

Por lo tanto, la solución general tiene la forma

$$y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{3}\,\text{ch}\,2x + \frac{1}{6}\,\text{sh}\,2x.$$

Para hallar C_1 y C_2 utilizamos las condiciones iniciales:

$$\begin{array}{c} C_1 + C_2\cdot e^0 + \frac{1}{3}\,\text{ch}\,0 + \frac{1}{6}\,\text{sh}\,0 = 0, \\ C_2\cdot e^0 + \frac{2}{3}\,\text{sh}\,0 + \frac{1}{3}\,\text{ch}\,0 = 0, \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{3}, \\ C_2 + \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, $C_1 = 0$, $C_2 = -1/3$. De suerte que la solución particular buscada tiene la forma

$$y = -\frac{1}{3} e^x + \frac{1}{3} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{6} \operatorname{sh} 2x.$$

Nota. Conforme a la teoría general deberíamos representar el segundo miembro de la ecuación dada en la forma $(1/2)(e^{2x} + e^{-2x})$ aplicando además el teorema de superposición, o sea, buscar por separado las soluciones correspondientes a los sumandos $(1/2) e^{2x}$ y $(1/2) e^{-2x}$ del segundo miembro. Nos hubiese quedado:

para $(1/2) e^{2x}$: $\alpha = 2$, $\beta = 0$; $\alpha + \beta i = 2$; $r = 0$, $n = l = 0$; por lo tanto, $u_1(x) = A_1 e^{2x}$;

para $(1/2) e^{-2x}$: $\alpha_1 = -2$; $\beta_1 = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 i = -2$; $r = 0$; $n_1 = l_1 = 0$; por lo tanto, $u_2(x) = B_1 e^{-2x}$.

Por eso la solución particular conviene buscarla en la forma de

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x},$$

pero

$$A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x} = A_1 (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x) + B_1 (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x) =$$
$$= (A_1 + B_1) \operatorname{ch} 2x + (A_1 - B_1) \operatorname{sh} 2x = A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x.$$

Hemos buscado precisamente en esta forma la solución de la ecuación dada.

En general, cabe señalar que al aplicar el método de selección de una solución particular, esta última siempre es buscada en la forma de una función con igual estructura que el segundo miembro de la ecuación dada, pero convenientemente completada por sumandos y factores adicionales para asegurar la posibilidad de que los términos aparecidos después de la sustitución en el primer miembro de la ecuación se identifiquen con todos los términos (semejantes a ellos) del segundo miembro.

678. Resolver la ecuación $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 2k + 2 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = 1 \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. La solución particular conviene buscarla en la forma $u = Ax^2 + Bx + C$ (en el caso dado $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\alpha + \beta i = 0$; puesto que en la ecuación característica no hay una raíz 0, entonces $r = 0$; $n = l = 2$). De suerte que

$$\begin{array}{c|r|l} & 2 & u = Ax^2 + Bx + C \\ + & -2 & u' = 2Ax + B \\ & 1 & u'' = 2A \\ \hline \end{array}$$

$$u'' - 2u' + 2u = 2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A) \equiv x^2.$$

De aquí,

$$2A = 1, \quad 2B - 4A = 0, \quad 2C - 2B + 2A = 0,$$

o sea, $A = 1/2$, $B = 1$, $C = 1/2$.

Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}(x + 1)^2.$$

679. Resolver la ecuación $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 \cos x +$

$+ C_2 \operatorname{sen} x$. Sirviéndose del principio de superposición, la solución particular de la ecuación inicial conviene buscarla en la forma $u = u_1 + u_2 = (Ax + B)\, e^x + Ce^{-x}$ (tenemos para u_1: $f_1(x) = xe^x$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 i = 1$; puesto que no hay una raíz así, entonces $r_1 = 0$; $n = l = 1$; para u_2: $f_2(x) = 2e^{-x}$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 0$; $\alpha_2 + \beta_2 i = -1$; $r_2 = 0$; $n_1 = l_1 = 0$).

De suerte que

$$+\left|\begin{array}{c|l} 1 & u = (Ax+B)\, e^x + Ce^{-x} \\ 0 & u' = Ae^x + (Ax+B)\, e^x - Ce^{-x} \\ 1 & u'' = 2Ae^x + (Ax+B)\, e^x + Ce^{-x} \end{array}\right.$$

$$u'' + u = 2Axe^x + (2A + 2B)\, e^x + 2Ce^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}.$$

De aquí

$2A = 1$, $2A + 2B = 0$, $2C = 2$, o sea, $A = 1/2$, $B = -1/2$, $C = 1$.

Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(x - 1)\, e^x + e^{-x}.$$

680. Resolver la ecuación $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

Resolución. La ecuación característica $k^3 + k^2 - 2k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -2$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$. Buscamos la solución particular, valiéndonos del principio de superposición, en la forma $u = u_1 + u_2 = x(Ax + B) + Cxe^x$.

Por lo tanto, tenemos:

$$+\left|\begin{array}{r|l} 0 & u = (Ax+B)\, x + Cxe^x \\ -2 & u' = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x \\ 1 & u'' = 2A + 2Ce^x + Cxe^x \\ 1 & u''' = 3Ce^x + Cxe^x \end{array}\right.$$

$$u''' + u'' - 2u' = -4Ax + (2A - 3B) + 3Ce^x \equiv x - e^x.$$

De aquí $-4A = 1$, $2A - 2B = 0$, $3C = -1$, o sea, $A = -1/4$, $B = -1/4$, $C = -1/3$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{4}\, x(x+1) - \frac{1}{3}\, xe^x.$$

681. Hallar la solución de la ecuación $y'' + y = 3 \operatorname{sen} x$, que satisface las condiciones de contorno $y(0) + y'(0) = 0$, $y(\pi/2) + y'(\pi/2) = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. La solución particular conviene buscarla en la forma $u = x(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$ (en el caso dado $\alpha = 0$, $\beta = i$, $\alpha + \beta i = i$; como i es una raíz simple de la ecuación característica, entonces $r = 1$; $m = n = l = 0$).

Por lo tanto, tenemos:

$$+\left|\begin{array}{c|l} 1 & u = (A \cos x + B \operatorname{sen} x) \cdot x \\ 0 & u' = (-A \operatorname{sen} x + B \cos x) + (A \cos x + B \operatorname{sen} x) \\ 1 & u'' = 2(-A \operatorname{sen} x + B \cos x) + (-A \cos x - B \operatorname{sen} x) \cdot x \end{array}\right.$$

$$u'' + u = -2A \operatorname{sen} x + 2B \cos x \equiv 3 \operatorname{sen} x.$$

De aquí $-2A = 3$, $2B = 0$, o sea, $A = -3/2$, $B = 0$.
Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{3}{2} x \cos x.$$

Hallamos las constantes C_1 y C_2, utilizando las condiciones de contorno. Tenemos

$$y' = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + \frac{3}{2} x \operatorname{sen} x - \frac{3}{2} \cos x$$

y luego

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \cos 0 = C_1,$$

$$y'(0) = -C_1 \operatorname{sen} 0 + C_2 \cos 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0 \frac{3}{2} \cos 0 = C_2 - \frac{3}{2},$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = C_2,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + C_2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -C_1 + \frac{3}{4} \pi.$$

De este modo,

$$y(0) + y'(0) = C_1 + C_2 - 3/2 = 0,$$
$$y(\pi/2) + y'(\pi/2) = C_2 - C_1 + 3\pi/4 = 0,$$

de donde obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3/2, \\ C_1 - C_2 = 3\pi/4, \end{cases}$$

resolviendo el cual hallamos $C_1 = 3(2 + \pi)/8$, $C_2 = 3(2 - \pi)/8$. De suerte que la solución de la ecuación inicial que satisface las condiciones de contorno dadas tiene la forma

$$y = \frac{3}{8} [(\pi + 2) \cos x - (\pi - 2) \operatorname{sen} x] - \frac{3}{2} x \cos x.$$

681a. Hallar la solución de la ecuación $y'' + 6y' + 10y = 80 = 80e^x \cos x$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.

Resolución: la ecuación característica $k^2 + 6k + 10 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = -3 \pm i$ y la solución general de la ecuación homogénea $y = e^{-3} \times \times (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. La solución particular la buscaremos en la forma $u = e^x (A \cos x + B \operatorname{sen} x)$.

Por lo tanto, tenemos

$$+\left|\begin{array}{c|l} 10 & u = e^x (A \cos x + B \operatorname{sen} x) \\ 6 & u' = e^x (A \cos x + B \operatorname{sen} x - A \operatorname{sen} x + B \cos x) \\ 1 & u'' = e^x (-2A \operatorname{sen} x + 2B \cos x) \end{array}\right.$$

$$u'' + 6u' + 10u = e^x [(16A + 8B) \cos x + (16B - 8A) \operatorname{sen} x] \equiv 80e^x \cos x.$$

De aquí, $16A + 8B = 80$, $16B - 8A = 0$, o sea $A = 4$, $B = 2$.
Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial $y = e^{-3x} \times \times (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + 2e^x (2 \cos x + \operatorname{sen} x)$.

Las constantes C_1 y C_2 las encontraremos, utilizando las condiciones iniciales. Tenemos

$$y' = e^{-3x}(-3C_1 \cos x - 3C_2 \operatorname{sen} x - C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) + \\ + 2e^{x}(3 \cos x - \operatorname{sen} x)$$

y luego

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + 4 = 4 \\ y'(0) = -3C_1 + C_2 + 6 = 10 \end{array}\right\}, \quad \text{de donde} \quad C_1 = 0 \text{ y } C_2 = 4.$$

De suerte que la solución de la ecuación inicial que satisface las condiciones iniciales tiene la forma

$$y = 4e^{-3x} \operatorname{sen} x + 2e^{x}(2 \cos x + \operatorname{sen} x).$$

682. Hallar la solución de la ecuación $y'' + y = \operatorname{tg} x$, que satisface las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi/6) = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. Por el método de coeficientes indeterminados no se puede buscar la solución particular [la función $f(x)$ a distinción de la anterior tiene otra estructura] y por eso utilizamos el método de variación de las constantes arbitrarias. Buscamos la solución de la ecuación en la forma

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \operatorname{sen} x,$$

donde las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ es necesario encontrarlas del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0 \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x), \end{array}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{l} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \operatorname{sen} x = 0, \\ -C_1'(x) \operatorname{sen} x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x. \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $C_1'(x) = -\operatorname{sen}^2 x / \cos x$, $C_2'(x) = \operatorname{sen} x$, de donde

$$C_1(x) = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\, dx + A = \operatorname{sen} x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + A;$$

$$C_2(x) = -\cos x + B.$$

(En vez de la resolución de este sistema se puede utilizar las fórmulas citadas en la pág. 166).

De este modo, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = A \cos x + B \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

donde A y B son las constantes arbitrarias que se han de determinar de las condiciones de contorno:

$$\left\{\begin{array}{l} A \cos 0 + B \operatorname{sen} 0 - \cos 0 \cdot \ln \operatorname{tg}(\pi/4) = 0, \\ A \cos(\pi/6) + B \operatorname{sen}(\pi/6) - \cos(\pi/6) \ln \operatorname{tg}(\pi/3) = 0. \end{array}\right.$$

De aquí $A = 0$, $B = (\sqrt{3}/2) \ln 3$. Por consiguiente, la solución que satisface las condiciones de contorno dadas tiene la forma

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 3 \operatorname{sen} x - \cos x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

683. Una cadena homogénea que cuelga libremente de un gancho se desliza de éste por la acción de la gravedad (se puede despreciar el rozamiento). Determinar cuánto tiempo tardará toda la cadena en

deslizarse del gancho, si en el instante inicial por un lado del gancho había 10 m de cadena y por el otro 8 m, la velocidad de la cadena es igual a cero.

Resolución. Sea el peso de un metro lineal de cadena igual a P N. Designemos por x la longitud (en m) de la parte mayor de la cadena que cuelga del gancho pasados t s después del inicio del movimiento. Al centro de gravedad se aplica una fuerza $F = [x - (18 - x)] P$ N. La masa de la cadena es igual a $18P/g$ kg, su aceleración es de $\ddot{x}$ m/s². De suerte que llegamos a la ecuación de movimiento del centro de gravedad de la cadena:

$$\frac{18}{g} P\ddot{x} = (2x - 18) P, \quad \text{o bien} \quad \ddot{x} - \frac{g}{9} x = -g.$$

Esta ecuación se debe integrar para las condiciones iniciales: $x = 10$, $\dot{x} = 0$, para $t = 0$.

Las raíces de la ecuación característica $k_{1,2} = \pm\sqrt{g}/3$; la solución particular de la ecuación no homogénea conviene buscarla en la forma de $u = A$. Después de efectuar la sustitución en la ecuación hallamos $A = 9$. Ahora bien, la solución general tiene la forma

$$x = C_1 e^{t\sqrt{g}/3} + C_2 e^{-t\sqrt{g}/3} + 9.$$

Utilizando las condiciones iniciales, obtenemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 9 = 10, \\ \dfrac{\sqrt{g}}{3}(C_1 - C_2) = 0, \end{cases}$$

de donde $C_1 = C_2 = 0{,}5$. Por lo tanto,

$$x = (e^{t\sqrt{g}/3} + e^{-t\sqrt{g}/3})/2 + 9 = 9 + \operatorname{ch}(t\sqrt{g}/3).$$

El tiempo que tarda toda la cadena en deslizarse se determina de la condición: $x = 18$ para $t = T$. Por consiguiente,

$$18 = 9\operatorname{ch}\left(\frac{T\sqrt{g}}{3}\right), \quad \text{o bien} \quad \frac{e^{T\sqrt{g}/3} + e^{-T\sqrt{g}/3}}{2} = 9.$$

Despejando T en la ecuación obtenida, encontramos

$$T = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + 4\sqrt{5}) \approx 2{,}76 \text{ s}.$$

Resolver las ecuaciones:

684. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
685. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
686. $y'' - 6y' + 25y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$.
687. $y'' + y = \cos 3x$; $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 1$.
688. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$.
689. $2y'' - y' = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
690. $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x + 1$; $y(0) = 1/4$, $y'(0) = 0$.
691. $y'' - 4y' = 2 \operatorname{sh} 2x$.
692. $y'' + 4y = \cos 2x$; $y(0) = y(\pi/4) = 0$.
693. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$.

694. $y'' - (\alpha + \beta) y' + \alpha\beta y = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$.
695. $y'' - y = x \cos^2 x$.
696. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$.
697. $y'' - y = 2 \operatorname{sh} x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
698. $y'' - 4y = \operatorname{ch} 2x$.
699. $y'' - 2y' \cos \varphi + y = 2 \operatorname{sen} x \cos \varphi$.
700. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$.
701. $y'' + 9y = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$; $y(0) = y(\pi/2) = 0$.
701a. $y'' - 4y' + 8y = 61e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

702. Mostrar que la solución general de la ecuación diferencial $y'' - m^2 y = 0$ se puede representar de la forma $y = C_1 \operatorname{ch} mx + C_2 \operatorname{sh} mx$.

703. Mostrar que la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 - \beta^2) y = 0$ se puede representar de la forma $y = e^{\alpha x} (C_1 \operatorname{ch} \beta x + C_2 \operatorname{sh} \beta x)$.

704. Determinar la ley del movimiento de un punto material de masa m que se traslada por una recta bajo la acción de la fuerza de recuperación orientada hacia el origen de la lectura y directamente proporcional a la distancia del punto al origen de la lectura, si el medio no ofrece resistencia pero sobre el punto actúa una fuerza externa $F = A \operatorname{sen} \omega t$.

En los problemas 705—708 aplicar el método de variación de las constantes arbitrarias:

705. $y'' + y = 1/\sqrt{\cos 2x}$.
706. $y'' + 5y' + 6y = 1/(1 + e^{2k})$.
707. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.
708. $y'' \cos (x/2) + (1/4)\, y \cos (x/2) = 1$.

709. Resolver el problema 683 teniendo en cuenta el rozamiento de la cadena contra el gancho, si la fuerza de rozamiento es igual al peso de 1 m de cadena.

Indicación: la ecuación de movimiento del centro de gravedad de la cadena tiene la forma

$$18 \frac{d^2x}{dt^2} = gx - (18 - x) g - g \cdot 1.$$

5. Ecuación de Euler. Una ecuación lineal de coeficientes variables que tiene la forma

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

o, en forma más general,

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} (ax + b) y' + a_n y = f(x) \tag{2}$$

se llama *ecuación de Euler*. Aquí los a_i son coeficientes constantes. Con ayuda de las sustituciones $x = e^t$ para la ecuación (1) y $ax + b = e^t$ para la (2), ambas se transforman en ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

710. Resolver la ecuación $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

Resolución. Haciendo $x=e^t$, o bien $t=\ln x$, de donde $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, obtenemos

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}e^{-t},$$

$$y''=\frac{d}{dt}\,e^{-t}\dot{y}\,\frac{dt}{dx}=(\dot{y}e^{-t})'_t\cdot e^{-t}=(\ddot{y}-\dot{y})\,e^{-2t}$$

(connotamos con puntos la derivación respecto a t). Entonces la ecuación inicial tendrá la forma

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\,(\ddot{y}-\dot{y})-e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+\dot{y}=0, \quad \text{o bien} \quad \ddot{y}-2\dot{y}+y=0.$$

La ecuación característica $k^2-2k+1=0$ tiene las raíces $k_1=k_2=1$. Por consiguiente, la solución general es

$$y=(C_1+C_2t)\,e^t, \quad \text{o bien} \quad y=(C_1+C_2\ln x)\,x.$$

711. Resolver la ecuación $(4x-1)^2\,y''-2\,(4x-1)\,y'+8y=0$.

Resolución. Tomamos $4x-1=e^t$, entonces $dx=\frac{1}{4}e^t\,dt$, $\frac{dt}{dx}=4e^{-t}$. De aquí

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=4e^{-t}\cdot\dot{y}, \quad y''=16e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}).$$

La ecuación inicial adopta la forma

$$16e^{2t}\cdot e^{-2t}\,(\ddot{y}-\dot{y})-4\cdot 2e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+8y=0, \text{ o bien}$$

$$2\ddot{y}-3\dot{y}+y=0.$$

La ecuación característica $2k^2-3k+1=0$ tiene las raíces $k_1=1$, $k_2=1/2$. Por consiguiente, la solución general es

$$y=C_1e^t+C_2e^{t/2}, \text{ o bien } y=C_1\,(4x-1)+C_2\,\sqrt{4x-1}.$$

712. Resolver la ecuación $y''-xy'+y=\cos\ln x$.

Resolución. Hacemos $x=e^t$, entonces $t=\ln x$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, por consiguiente, $y'=\dot{y}\cdot e^{-t}$, $y''=(\ddot{y}-\dot{y})\,e^{-2t}$. La ecuación dada adopta la forma

$$\ddot{y}-2\dot{y}+y=\cos t.$$

La solución general de la ecuación homogénea es $y=(C_1+C_2t)\,e^t$ y la solución particular de la ecuación no homogénea conviene buscarla en la forma de $u=A\cos t+B\operatorname{sen} t$. Entonces

$$+\left|\begin{array}{r|l} 1 & u=A\cos t+B\operatorname{sen} t\\ -2 & u'=-A\operatorname{sen} t+B\cos t\\ 1 & u''=-A\cos t-B\operatorname{sen} t \end{array}\right.$$

$$u''-2u'+u=-2B\cos t-2A\operatorname{sen} t\equiv\cos t,$$

de donde $B = -1/2$, $A = 0$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación inicial es

$$y=(C_1+C_2t)\,e^t-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \quad \text{o bien} \quad y=(C_1+C_2 \ln x)\,x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\ln x.$$

Resolver las ecuaciones:

713. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$.

714. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3\ln^2 x$.

715. $x^2y'' + xy' + y = \operatorname{sen}(2\ln x)$.

716. $x^2y'' + 3xy' + y = 1/x$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

717. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3/2$; $y(1) = 1/2$, $y(4) = 0$.

§ 4. Integración de ecuaciones integrales con ayuda de series

1. Aplicación de las series a la resolución de las ecuaciones diferenciales. En algunos casos, cuando la integración de una ecuación diferencial en las funciones elementales es imposible, se busca la solución de tal ecuación en forma de una serie de potencias

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n.$$

Los coeficientes indeterminados C_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) se encuentran sustituyendo la serie en la ecuación e igualando los coeficientes de potencias iguales de la diferencia $x - x_0$ en ambos miembros de la igualdad obtenida. Si se logra hallar todos sus coeficientes, entonces la serie obtenida determina la solución en toda su región de convergencia.

En los casos en que para la ecuación $y' = f(x, y)$ se necesita resolver el problema de Cauchy con una condición inicial $y|_{x=x_0} = y_0$ la solución se puede buscar con ayuda de la serie de Taylor:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}x_0}{n!}(x-x_0)^n,$$

donde $y(x_0) = y_0$, $y'(x) = f(x_0, y)$, en adelante las derivadas $y^{(n)}(x_0)$ se determinan por la derivación sucesiva de la ecuación inicial sustituyendo en el resultado de la derivación a $x, y, y', \ldots$ por los valores de x_0, y_0, y_0' y de todas las demás derivadas sucesivas halladas. Análogamente, con ayuda de la serie de Taylor se pueden integrar también ecuaciones de órdenes superiores.

718. Integrar la ecuación $y'' - x^2y = 0$.

Resolución. Buscamos la solución de esta ecuación en la forma de la serie

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots.$$

Sustituyendo y e y'' en la ecuación inicial, encontramos

$$[2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3x + 4\cdot 3C_4x^2 + \ldots + (n+2)(n+1)\,C_{n+1}x^n + \ldots] -$$
$$- x^2[C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots] = 0.$$

Agrupamos los términos de iguales potencias de x:

$$2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3x^2+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+4)(n+3)\,C_{n+4}-C_n]\,x^{n+2}=0.$$

Igualando a cero todos los coeficientes de la serie obtenida (para que la ecuación se convierta en identidad), hallamos:

$$C_2=C_3=0;\quad C_{n+4}=\frac{C_n}{(n+3)(n+4)}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

La última relación permite hallar sucesivamente todos los coeficientes del desarrollo buscado (C_0 y C_1 siguen siendo arbitrarios y desempeñan el papel de constantes arbitrarias de integración):

$$C_{4k}=\frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ \ldots\ (4k-1)\cdot 4k},\quad C_{4k+1}=\frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ \ldots\ 4k\,(4k+1)};$$

$$C_{4k+2}=C_{4k+3}=0\quad (k=0,\ 1,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

De este modo,

$$y=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ \ldots\ (4k-1)\,4k}+C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ \ldots\ 4k\,(4k+1)},$$

Las series obtenidas convergen en todo el eje numérico y determinan dos soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación inicial.

Con ayuda del desarrollo en serie de potencias de x integrar las ecuaciones siguientes y definir el campo de existencia de la solución obtenida:

719. $y' + xy = 0$.

720. $y' = x - 2y$; $y(0) = 0$.

Indicación: en virtud de la condición inicial hacer $C_0 = 0$.

721. $y'' + xy' + y = 0$.

722. $y'' - xy' - 2y = 0$.

723. $y'' + x^2y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Indicación: en virtud de las condiciones iniciales hacer $C_0 = 0$, $C_1 = 1$.

724. Integrar aproximadamente con ayuda de la serie de Taylor la ecuación $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, tomando los seis primeros términos del desarrollo, distintos de cero.

Resolución. A partir de la ecuación y de las condiciones iniciales hallamos $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$. Derivando la ecuación dada, sucesivamente obtenemos

$$y'' = 2x + 2yy',\quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2y'y'',\quad y^{IV} = 6y'y'' + 2yy''',$$

$$y^{V} = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}.$$

Haciendo $x = 0$ y utilizando los valores de $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, encontramos sucesivamente: $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 8$, $y^{IV}(0) = 28$, $y^{V}(0) = 144$. La solución buscada tiene la forma

$$y=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\frac{144x^5}{5!}+\cdots.$$

725. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Hallar los cuatro primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

Resolución. Derivando la ecuación $y'' = x + y^2$, tenemos

$$y''' = 1 + 2yy', \quad y^{IV} = 2yy'' + 2y'^2, \quad y^{V} = 2yy''' + 6y'y'',$$
$$y^{VI} = 2yy^{IV} + 8y'y^{IV} + 6y''^2.$$

Para $x = 0$ obtenemos

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1, \quad y^{VI}(0) = 2,$$
$$y^{V}(0) = 0, \quad y^{VI}(0) = 16.$$

La solución tiene la forma

$$y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \dots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots .$$

726. $y' = x^2y + y^3$, $y(0) = 1$. Hallar los cuatro primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

727. $y' = x + 2y^2$, $y(0) = 0$. Hallar los dos primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

728. $y'' - xy^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Hallar los cuatro primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

729. $y' = 2x - y$; $y(0) = 2$. Hallar la solución exacta.

730. $y' = y^2 + x$; $y(0) = 1$. Hallar los cinco primeros términos del desarrollo.

731. $y'' = (2x - 1)y - 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Hallar los cinco primeros términos del desarrollo.

2. Ecuaciones de Bessel. Una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (\lambda = \text{const}) \tag{1}$$

se llama *ecuación de Bessel* (se reduce a la misma forma la ecuación $x^2y'' + xy' + (m^2x^2 - \lambda^2)y = 0$ efectuando la sustitución $mx = \xi$).

Buscamos la solución de la ecuación (1) en la forma de una serie de potencia generalizada, o sea, en la forma del producto de cierta potencia de x por la serie de potencias:

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{r+k}. \tag{2}$$

Sustituyendo la serie de potencias generalizada en la ecuación (1) e igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x en el primer miembro de la ecuación, obtenemos el sistema

$$\begin{array}{c|l} x^r & (r^2 - \lambda^2) \cdot a_0 = 0, \\ x^{r+1} & [(r+1)^2 - \lambda^2] \cdot a_1 = 0, \\ x^{r+2} & [(r+2)^2 - \lambda^2] \cdot a_2 + a_0 = 0, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{r+k} & [(r+k)^2 - \lambda^2] \cdot a_k + a_{k-2} = 0. \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Teniendo en cuenta que $a_0 \neq 0$, hallamos del sistema dado $r_{1,2} = \pm\lambda$. Sea $r_1 = \lambda$. Entonces de la segunda ecuación del sistema hallamos $a_1 = 0$ y de la ecuación $[(r+k)^2 - \lambda^2]\, a_k = -a_{k-2}$, asignando a k los valores de 3, 5, 7, ..., sacamos la conclusión de que $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2k+1} = 0$. Para los coeficientes con numeración par obtenemos las expresiones

$$a_2 = \frac{-a_0}{(2\lambda+2)\cdot 2}, \quad a_4 = \frac{-a_2}{(2\lambda+4)\cdot 4} = \frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 2^4}, \quad \ldots,$$

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{(2\lambda+2)\cdot 2\cdot k} = (-1)^{k+1}\cdot\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k\,(2\lambda+2)(2\lambda+4)\ldots(2\lambda+2k)}.$$

Sustituyendo los coeficientes hallados en la serie (2), obtenemos la solución

$$y_1(x) = a_0\cdot x^{\lambda}\left[1 - \frac{x^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2\lambda+2)(2\lambda+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2\lambda+2)(2\lambda+4)(2\lambda+6)} + \ldots\right] =$$
$$= a_0\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{\lambda+2k}}{4^k k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)},$$

donde el coeficiente a_0 sigue siendo arbitrario.

Para $r_2 = -\lambda$ todos los coeficientes a_k se determinan análogamente sólo en el caso en que λ no es igual a un número entero. Entonces la solución se puede obtener sustituyendo en la solución precedente $y_1(x)$ la magnitud λ por $-\lambda$:

$$y_2(x) = a_0 x^{-\lambda}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)(-2\lambda+6)} + \ldots\right] =$$
$$= a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{-\lambda+2k}}{4^k k!\,(-\lambda+1)(-\lambda+2)\ldots(-\lambda+k)}.$$

Las series de potencias obtenidas convergen para todos los valores de x lo que se determina fácilmente basándose en el criterio de d'Alembert. Las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes, ya que la relación entre ellas no es constante.

La solución $y_1(x)$ multiplicada por la constante $a_0 = \dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}$ se llama *función de Bessel* (o *función cilíndrica*) *de orden λ de primer género* y se designa por el símbolo $J_{\lambda}(x)$. La solución y_2 se designa por $J_{-\lambda}(x)$.

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (1) cuando λ no es igual a un número entero tiene la forma

$$y(x) = C_1 J_{\lambda}(x) + C_2 J_{-\lambda}(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

En la selección universalmente adoptada de la constante a_0 participa la función gamma $\Gamma(\lambda+1)$, definida por la integral impropia (véase la pág. 41):

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{\lambda-1}\,dx \quad (\lambda > 0).$$

Se puede mostrar que para λ igual a la mitad del número impar la función Bessel se expresa por funciones elementales, ya que en este caso la función gamma que forma parte de la definición de la función de Bessel

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2^\lambda\cdot\Gamma(\lambda+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{\lambda+2k}}{4^k\cdot k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k},$$

[el producto $(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)\,\Gamma(\lambda+1)$ sustituido, conforme a la propiedad de la función gamma, por $\Gamma(\lambda+k+1)$], toma los valores siguientes:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{-1/2}\,dx=2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

(aquí se utiliza el valor de la integral de Poisson):

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};\ \dots$$

Para $\lambda=n$ (natural) la función de Bessel J_λ se puede escribir brevemente así:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=\sum_{k=0}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Para una λ negativa y entera la solución particular no se puede expresar mediante la función de Bessel de primer género y conviene buscarla en la forma

$$K_n(x)=J_n(x)\cdot\ln x+x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), determinamos los coeficientes b_k. La función $K_n(x)$ multiplicada por cierta constante se llama *función de Bessel de n-ésimo orden de segundo género*.

732. Hallar la función de Bessel para $\lambda=0$.

Resolución. Valiéndonos de la igualdad

$$J_\lambda(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\lambda},$$

para $\lambda = 0$ obtenemos

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{4^k \cdot k! \cdot k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{4^k \cdot (k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2 \cdot (1\cdot 2)^2} - \frac{x^6}{4^3\,(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \ldots .$$

733. Resolver la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$

Resolución. Como $\lambda = 1/2$, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$y = C_1 J_{1/2} + C_2 J_{-1/2},$$

donde

$$J_{1/2} = \frac{1}{2^{1/2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot x^{1/2} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}.$$

Procediendo del mismo modo, obtenemos $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. Por consiguiente, la solución general

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x).$$

734. Hallar $J_1(x)$.

735. Resolver la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) y = 0.$

736. Resolver la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right) y = 0.$

§ 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

1. Sistema normal de ecuaciones diferenciales. El sistema de ecuaciones diferenciales que tienen la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

ponde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las funciones incógnitas de la variable independiente t se llama *sistema normal*.

Si los segundos miembros del sistema normal de las ecuaciones diferenciales son funciones lineales respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el sistema de ecuaciones lineales se llama *lineal*.

A veces el sistema normal de ecuaciones diferenciales puede reducirse a una sola ecuación de n-ésimo orden que contiene una sola función incógnita. La reducción del sistema normal a una sola ecuación puede ser alcanzada derivando una de las ecuaciones del sistema y eliminando todas las incógnitas a excepción de una de ellas (el llamado *método de eliminación*).

En algunos casos, combinando las ecuaciones del sistema, después de transformaciones poco complicadas se logra obtener ecuaciones fácilmente integrables (el llamado *método de combinaciones integrables*) lo que permite hallar la solución del sistema.

737. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=x+y, \quad \frac{dy}{dt}=x-y$$

para las condiciones iniciales: $x(0)=2$, $y(0)=0$.

Resolución. Derivamos con respecto a t la primera ecuación $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$; eliminando de la ecuación obtenida $\frac{dy}{dt}$ e y tenemos $\frac{d^2x}{dt^2}-2x=0$. La ecuación característica $k^2-2=0$ tiene las raíces $k_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. Por consiguiente, la ecuación general para x se escribe

$$x=C_1e^{t\sqrt{2}}+C_2e^{-t\sqrt{2}}.$$

La solución general para y se halla de la primera ecuación:

$$y=\frac{dx}{dt}-x=C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}}-C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Valgámonos de las condiciones iniciales para hallar las constantes arbitrarias:

$$C_1+C_2=2, \quad \sqrt{2}(C_1-C_2)-(C_1+C_2)=0.$$

De aquí $C_1=(\sqrt{2}+2)/2$, $C_2=(2-\sqrt{2})/2$. Ahora bien, la solución particular buscada tiene la forma

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{t\sqrt{2}}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t\sqrt{2}}, \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}.$$

738. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{2x+3y}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{y}{2x+3y}$$

para las condiciones iniciales: $x(0)=1$, $y(0)=2$.

Resolución. Escribimos la primera combinación integrable. Dividiendo la primera ecuación por la segunda, obtenemos

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}; \quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}; \quad \ln x=\ln y+\ln C_1, \quad \text{o sea,} \quad x=C_1y.$$

Escribimos la segunda combinación integrable. Sumando el duplo de la primera ecuación mas el triple de la segunda obtenemos

$$2\cdot\frac{dx}{dt}+3\cdot\frac{dy}{dt}=1; \quad 2dx+3dy=dt, \quad \text{o sea}, \quad 2x+3y=t+C_2.$$

Del sistema de ecuaciones $x=C_1y$, $2x+3y=t+C_2$ hallamos la solución general del sistema

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3}, \quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}$$

Utilizando las condiciones iniciales, obtenemos

$$1=\frac{C_1C_2}{2C_1+3}, \quad 2=\frac{C_2}{2C_1+3}, \quad \text{o sea}, \quad C_1=\frac{1}{2}, \quad C_2=8$$

Sustituyendo en la solución general los valores hallados de C_1 y C_2, obtenemos las soluciones particulares que satisfacen las condiciones iniciales:

$$x=\frac{1}{8}t+1, \quad y=\frac{1}{4}t+2.$$

739. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=2y, \quad \frac{dy}{dt}=2z, \quad \frac{dz}{dt}=2x.$$

Resolución. Derivando con respecto a t la primera ecuación: $\frac{d^2x}{dt^2}=2\cdot\frac{dy}{dt}$. Eliminando de la ecuación obtenida $\frac{dy}{dt}$, tenemos $\frac{d^2x}{dt^2}=4z$. Derivamos una vez más respecto a t la ecuación obtenida de segundo orden $\frac{d^3x}{dt^3}=4\cdot\frac{dz}{dt}$. Eliminando $\frac{dz}{dt}$, obtenemos

$$\frac{d^3x}{dt^3}-8x=0,$$

o sea, hemos llegado a la ecuación con una sola función desconocida. Resolviendo esta ecuación lineal homogénea de tercer orden, hallamos

$$x=C_1e^{2t}+e^{-t}\left(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right).$$

La solución general para y se obtiene de la primera ecuación del sistema

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left[2C_1e^{2t}-e^{-t}\left(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-t}\sqrt{3}\left(C_3\cos t\sqrt{3}-C_2\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right)\right]$$

o bien

$$y=C_1e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(C_3\sqrt{3}+C_2\right)\cos t\sqrt{3}-\left(C_2\sqrt{3}+C_3\right)\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right].$$

De la segunda ecuación del sistema hallamos z;

$$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dt}=C_1e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(C_3\sqrt{3}+C_2\right)\cos t\sqrt{3}-\left(C_2\sqrt{3}-C_3\right)\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right].$$

Resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales:

740. $\frac{dx}{dt}+2x+y,\ \frac{dy}{dt}=x+2y;\quad x(0)=1,\ y(0)=3.$

741. $\frac{dx}{dt}=4x+6y,\ \frac{dy}{dt}=2x+3y+t.$

742. $\frac{dx}{dt}=e^{3t}-y,\ \frac{dy}{dt}=2e^{3t}-x.$

743. $y'=e^{x}-z,\quad z'=e^{-x}+y.$

744. $\frac{dx}{dt}=y+t,\quad \frac{dy}{dt}=x+e^{t}\quad x(0)=1,\ y(0)=0.$

745. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{x+y},\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{x+y};\quad x(0)=2,\ y(0)=4.$

746. $\frac{dx}{dt}=2x+y+\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-x+2\operatorname{sen} t.$

747. $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2(x+y),\ \frac{dy}{dt}=3x+y.$

748. $\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=1,\ \frac{dy}{dt}=x+y+\frac{2x}{t}-1.$

749. $\frac{dx}{dt}=x^{2}+xy,\ \frac{dy}{dt}=xy+y^{2}.$

Indicación. Considerar dos combinaciones integrables: 1) sumar las ecuaciones; 2) dividir miembro a miembro la primera ecuación obtenida por la segunda.

750. $\frac{dx}{dt}+\frac{2dy}{dt}-2(x-y)=3e^{t},\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2x+y=4e^{2t}.$

751. $\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+m^{2}y=0,\ \frac{d^{2}y}{dt^{2}}-m^{2}x=0.$

752. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{x^{2}+y^{2}+z^{2}},\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{x^{2}+y^{2}+z^{2}},\ \frac{dz}{dt}=\frac{z}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}.$

2. Resolución de los sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes por medio de matrices (método modificado de Euler). Sea dado un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con n funciones desconocidas cuyos coeficientes son constantes:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Este sistema se puede escribir en forma de una sola ecuación diferencial matricial

$$\frac{dX}{dt}=Ax.$$

Aquí

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Buscamos la solución del sistema en la forma

$$x_1=p_1e^{\lambda t},\quad x_2=p_2e^{\lambda t},\ \dots,\ x_n-p_ne^{\lambda t}.$$

Sustituyendo los valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$ en el sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales respecto a p_1, $p_2, \dots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,p_1+a_{12}p_2+\dots+a_{1n}p_n=0, \\ a_{21}p_1+(a_{22}+\lambda)\,p_2+\dots+a_{2n}p_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}p_1+a_{n2}p_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)\,p_n=0. \end{cases}$$

El sistema debe tener una solución no nula, por eso para determinar λ obtenemos la ecuación de n-ésimo grado

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

La última ecuación es la ecuación característica de la matriz A y, al mismo tiempo, la ecuación característica del sistema.

Supongamos que la ecuación característica tiene n raíces diferentes λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$, que son los números característicos de la matriz A. A cada número característico le corresponde el propio vector. Supongamos que a cada número característico λ_k le corresponde el vector propio $(p_{1k};\ p_{2k};\ \dots;\ p_{nk})$, donde $k=1, 2, \dots, n$. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales tiene n soluciones:

la primera solución correspondiente a la raíz $\lambda=\lambda_1$:

$$x_{11}=p_{11}e^{\lambda_1 t},\quad x_{21}=p_{21}e^{\lambda_1 t},\ \dots,\ x_{n1}=p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

la segunda solución correspondiente a la raíz $\lambda=\lambda_2$:

$$x_{12}=p_{12}e^{\lambda_2 t},\quad x_{22}=p_{22}e^{\lambda_2 t},\ \dots,\ x_{n2}=p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

. . . .

la n-ésima solución correspondiente a la raíz $\lambda=\lambda_n$:

$$x_{1n}=p_{1n}e^{\lambda_n t},\quad x_{2n}=p_{2n}e^{\lambda_n t},\ \dots,\ x_{nn}=p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Hemos obtenido el sistema fundamental de soluciones. La solución general del sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1x_{11}+C_2x_{12}+\dots+C_nx_{1n}, \\ x_2 &= C_1x_{21}+C_2x_{22}+\dots+C_nx_{2n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= C_1x_{n1}+C_2x_{n2}+\dots+C_nx_{nn}. \end{aligned}$$

Los casos de raíces complejos y múltiples se examinan en los ejemplos.

753. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=7x_1+3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=6x_1+4x_2. \end{cases}$$

Resolución. Componemos la ecuación característica de la matriz del sistema

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \text{o bien} \quad \lambda^2-11\lambda+10=0.$$

Sus raíces $\lambda_1=1$, $\lambda_2=10$, son los números característicos de la matriz.

Cuando $\lambda=1$, las ecuaciones para determinar el vector propio tienen la forma $(7-1)\,p_1+3p_2=0$ y $6p_1+(4-1)\,p_2=0$ y se reducen a una sola ecuación $2p_1+p_2=0$. Esta última ecuación determina el vector $(1;\ -2)$.

Para $\lambda=10$ obtenemos la ecuación $(7-10)\,p_1+3p_2=0$, $6p_1+(4-10)\,p_2=0$, o bien $p_1-p_2=0$. Esta ecuación determina el vector $(1;\ 1)$.

Obtenemos el sistema fundamental de soluciones: para $\lambda=1$: $x_{11}=e^t$, $x_{21}=-2e^t$; para $\lambda=10$: $x_{12}=e^{10t}$, $x_{22}=e^{10t}$.

La solución general del sistema tiene la forma

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{10t}, \quad x_2=-2C_1e^t+C_2e^{10t}.$$

754. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=6x-12y-z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y-z. \\ \dfrac{dz}{dt}=-4x+12y+3z. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos la ecuación característica de la matriz del sistema:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Desarrollando el determinante, hallamos

$(6-\lambda)(\lambda^2-9)-48-12+12+4\lambda+72-12\lambda+36-12\lambda=0$,

o finalmente,

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0.$$

Esta ecuación tiene las raíces $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

Determinamos los vectores propios de la matriz A.

Para $\lambda=1$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5p_1-12p_2-p_3=0, \\ p_1-4p_2-p_3=0, \\ -4p_1+12p_2+2p_3=0, \end{cases}$$

una de las cuales es la consecuencia de dos otras.

Tomemos, por ejemplo, las primeras dos ecuaciones:

$$5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \quad p_1 - 4p_2 - p_3 = 0.$$

De aquí

$$p_1 = \begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 8k, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 4k,$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} k = -8k.$$

Haciendo $k = 1/4$, obtenemos el vector propio (2; 1; —2).

Para $= 2$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} 4p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 5p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 + p_3 = 0. \end{cases}$$

Volviendo a utilizar las primeras dos ecuaciones (la tercera, es consecuencia de ellas), hallamos:

$$p_1 = \begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 7k, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = 3k,$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = -8k.$$

Tomando $k = 1$, encontramos el vector propio (7: 3; —8).

Para $\lambda = 3$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} 3p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 6p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

De la última ecuación hallamos $p_1 = 3p_2$. Sustituimos este valor de p_1 en la primera ecuación y hallamos $p_3 = -3p_2$. Tomando $p_2 = 1$, obtenemos $p_1 = 3$, $p_3 = -3$, o sea, el vector propio (3; 1; —3).

El sistema fundamental de soluciones es:

para $\lambda = 1$: $x_{11} = 2e^t$, $x_{21} = e^t$, $x_{31} = -2e^t$,

para $\lambda = 2$: $x_{12} = 7e^{2t}$, $x_{22} = 3e^{2t}$, $x_{32} = -8e^{2t}$,

para $\lambda = 3$: $x_{13} = 3e^{3t}$, $x_{23} = e^{3t}$, $x_{33} = -3e^{3t}$.

La solución general se escribe de la forma

$$x_1 = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t},$$
$$x_2 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$
$$x_3 = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}.$$

755. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2. \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos la ecuación característica de la matriz del sistema:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (4-\lambda)^2 = -9, \quad \lambda - 4 = \pm 3i, \quad \lambda = 4 \pm 3i.$$

Determinamos los vectores propios.

Para $\lambda_1 = 4 + 3i$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

De este modo, $p_2 = ip_1$. Tomando $p_1 = 1$, obtenemos $p_2 = i$, o sea, el vector propio $(1;\ i)$.

Para $\lambda_2 = 4 - 3i$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

De aquí encontramos el vector propio $(1;\ -i)$.

El sistema fundamental de ecuaciones es:

para $\lambda_1 = 4 + 3i$:

$$x_{11} = e^{(4+3i)t} = e^{4t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_{21} = ie^{(4+3i)t} = e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t + i \cos 3t);$$

para $\lambda_2 = 4 - 3i$:

$$x_{12} = e^{(4-3i)t} = e^{4t}(\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_{22} = e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t - i \cos 3t).$$

De este modo, obtenemos la solución general

$$x_1 = C_1 e^{4t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + C_2 e^{4t}(\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_2 = C_1 e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t + i \cos 3t) + C_2 e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t - i \cos 3t),$$

o sea,

$$x_1 = e^{4t}[(C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)\, i \operatorname{sen} 3t],$$
$$x_2 = e^{4t}[-(C_1 + C_2)\operatorname{sen} 3t + (C_1 - C_2)\, i \cos 3t].$$

Haciendo $C_1 + C_2 = C_1^*$, $(C_1 - C_2)\, i = C_2^*$, obtenemos

$$x_1 = e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_2 = e^{4t}(-C_1^* \operatorname{sen} 3t + C_2^* \cos 3t).$$

La solución general puede ser hallada también de otro modo. En las soluciones correspondientes a uno de los números característicos complejos separaremos la parte real y la parte imaginaria (el número característico conjugado no lo examinamos):

$$e^{(4+3i)t} = e^{4t}\cos 3t + ie^{4t}\operatorname{sen} 3t,$$
$$ie^{(4+3i)t} = -e^{4t}\operatorname{sen} 3t + ie^{4t}\cos 3t.$$

Obtenemos dos soluciones particulares linealmente independientes: $x_{11} = e^{4t}\cos 3t$, $x_{21} = -e^{4t}\operatorname{sen} 3t$, $x_{12} = e^{4t}\operatorname{sen} 3t$, $x_{22} = e^{4t}\cos 3t$.

La solución general es

$$x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12}, \quad x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22},$$

o sea,

$$x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t), \quad x_2 = e^{4t}(-C_1 \operatorname{sen} 3t + C_2 \cos 3t).$$

756. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1-x_2. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \text{o bien} \quad (1-\lambda)(1+\lambda^2)=0.$$

Los números característicos son: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$.

Cuando $\lambda=1$, para determinar el vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -p_3=0, \\ p_1-p_2=0, \\ p_1-p_2-p_3=0. \end{cases}$$

Este sistema determina el vector propio (1; 1; 0).

Para $\lambda=i$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-i)\,p_1-p_3=0, \\ p_1-ip_2=0, \\ p_1-p_2-ip_3=0. \end{cases}$$

Este sistema determina el vector propio $(1;\ -i;\ 1-i)$.

El vector propio correspondiente al número característico $\lambda=-i$ no se examina.

Al valor de $\lambda=1$ le corresponden las soluciones

$$x_{11}=e^t, \quad x_{21}=e^t, \quad x_{31}=0.$$

Al valor de $\lambda=i$ le corresponden las soluciones

$$e^{it}=\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t, \quad -ie^{it}=-\mathrm{sen}\,t+i\cos t,$$
$$(1-i)\,e^{it}=(\cos t+\mathrm{sen}\,t)+i\,(\mathrm{sen}\,t-\cos t).$$

Separando las partes reales, obtenemos las soluciones

$$x_{12}=\cos t, \quad x_{22}=-\mathrm{sen}\,t, \quad x_{32}=\cos t+\mathrm{sen}\,t.$$

Separando las partes imaginarias, encontramos las soluciones

$$x_{13}=\mathrm{sen}\,t, \quad x_{23}=\cos t, \quad x_{33}=\mathrm{sen}\,t-\cos t.$$

La solución general es

$$x_1=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\,\mathrm{sen}\,t,$$
$$x_2=C_1e^t-C_2\,\mathrm{sen}\,t+C_3\cos t,$$
$$x_3=C_2(\cos t+\mathrm{sen}\,t)+C_3(\mathrm{sen}\,t-\cos t).$$

757. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=5x_1-x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2. \end{cases}$$

Resolución. Resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0; \quad (5-\lambda)(3-\lambda)+1=0; \quad \lambda^2-8\lambda+16=0; \quad \lambda_1=\lambda_2=4.$$

Si λ_1 es la raíz de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces a esta raíz le corresponde la solución

$$x_1=p_1(t)\,e^{\lambda_1 t}, \quad x_2=p_2(t)\,e^{\lambda_1 t}, \quad \ldots, \quad x_n=p_n(t)\,e^{\lambda_1 t},$$

donde $p_1(t)$, $p_2(t)$, . . ., $p_n(t)$ son polinomios de grado no mayor que $m-1$. De este modo, a la raíz doble $\lambda=4$ le corresponde la solución

$$x_1=e^{4t}(a_1t+a_2), \quad x_2=e^{4t}(b_1t+b_2).$$

Derivando x_1 y x_2, obtenemos

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1e^{4t}+4(a_1t+a_2)e^{4t}, \quad \frac{dx_2}{dt}=b_1e^{4t}+4(b_1t+b_2)e^{4t}.$$

Los valores de x_1, x_2, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$ se sustituyen en el sistema de ecuaciones. Después de reducir en e^{4t} tenemos

$$a_1+4(a_1t+a_2)=5(a_1t+a_2)-(b_1t+b_2),$$
$$b_1+4(b_1t+b_2)=a_1t+a_2+3(b_1t+b_2).$$

Igualando los coeficientes de t y los términos libres, obtenemos los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4a_1=5a_1-b_1, \\ 4b_1=a_1+3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+4a_2=5a_2-b_2, \\ b_1+4b_2=a_2+3b_2. \end{cases}$$

De ello se deduce que $a_1=b_1$; $a_2-b_2=a_1=b_1$. Haciendo $a_1=C_1$, $a_2=C_2$ (C_1 y C_2 son constantes arbitrarias), obtenemos $b_1=C_1$, $b_2=C_2-C_1$. Por consiguiente,

$$x_1=e^{4t}(C_1t+C_2), \quad x_2=e^{4t}(C_1t+C_2-C_1).$$

Este sistema se resuelve más sencillamente por el método de eliminación. En efecto, expresando x_2 de la primera ecuación y efectuando la derivación, sustituimos luego los valores de x_2 y $\dfrac{dx_2}{dt}$ en la segunda ecuación. Como resultado obtendremos una ecuación lineal homogénea de segundo orden respecto a x_1. Recomendamos al lector resolver por cuenta propia el sistema dado por el método de eliminación.

Hallar las soluciones generales de los sistemas:

758. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-ax_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-ax_1. \end{cases}$$

759. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=8x_2-x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2. \end{cases}$

760. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+x_3. \end{cases}$

761. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2-x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=2x_1-x_2. \end{cases}$

762. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=12x_1-5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=5x_1+12x_2. \end{cases}$

763. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dx}=x_1-x_2. \end{cases}$

764. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-15x_1-6x_2+16x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-15x_1-7x_1+18x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=-19x_1-8x_2+21x_3. \end{cases}$

765. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(a+1)\,x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+(a-1)\,y. \end{cases}$

766. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-4y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y. \end{cases}$

767. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x-y. \end{cases}$

Capítulo V. Elementos de la teoría de las probabilidades

§ 1. Suceso aleatorio, su frecuencia y probabilidad

Se llama *suceso aleatorio* al que puede tener lugar o no, cuando se cumple un conjunto de condiciones, ligadas con la posibilidad de la aparición de los sucesos dados.

Los sucesos aleatorios se designan por medio de las letras A, B, C, ... Cada realización del conjunto de condiciones que se examina se denomina *prueba*. El número de pruebas puede crecer infinitamente. La relación entre el número m de realización del suceso aleatorio dado A en una serie determinada de pruebas y el número total n de pruebas de esta serie se llama *frecuencia* relativa de manifestación del suceso A en esta serie de pruebas (o simplemente frecuencia relativa del suceso A) y se designa mediante $\overline{P}(A)$. De tal modo, $\overline{P}(A) = m/n$.

La frecuencia relativa de un suceso aleatorio siempre está comprendida entre el cero y la unidad: $0 \leqslant \overline{P}(A) \leqslant 1$.

Los sucesos aleatorios masivos poseen la propiedad de la *estabilidad* de la frecuencia: los valores de la frecuencia del suceso aleatorio dado que se observan en diferentes series de pruebas homogéneas (siempre que el número de pruebas en cada serie es suficientemente grande) varían poco de una serie a otra.

Al estudiar sucesos aleatorios, es precisamente esta circunstancia la que permite emplear los métodos matemáticos asignando a cada suceso aleatorio masivo su *probabilidad* por la cual se toma el número (hablando en general, de antemano desconocido) alrededor del cual oscila la frecuencia observada del suceso.

La probabilidad de un suceso aleatorio A se designa por $P(A)$. La probabilidad de un suceso aleatorio, al igual que su frecuencia relativa, está comprendida entre el cero y la unidad: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

A un suceso *cierto* (o sea, al suceso que debe producirse en cada prueba) se le atribuye la probabilidad $P(A) = 1$.

A un suceso *imposible* (o sea, al suceso que no puede producirse en ninguna prueba) se le atribuye la probabilidad $P(A) = 0$.

En algunos casos elementales la probabilidad de un suceso aleatorio puede ser determinada de antemano. Esto se puede hacer, por ejemplo, cuando los resultados posibles de cada una de pruebas homogéneas pueden representarse en forma de n resultados («casos») únicamente posibles, incompatibles entre sí y equiposibles (o sea, además de estos n sucesos no pueden haber ningunos otros, dos sucesos cualesquiera no pueden ocurrir simultáneamente y hay razones para suponer que la realización de cualquiera de ellos no es más posible que la de los restantes). Si entre estos n casos únicamente posibles, incompatibles y equiposibles hay m ligados a la manifestación del suceso A (o, como se dice en la teoría de las probabilidades, «favorecen» A), entonces como probabilidad del suceso A se toma la relación entre m y n: $P(A) = m/n$.

768. En una cajita hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la bola extraída no exceda de 10?

Resolución. Como el número de cualquier bola que se halla en la cajita no supera 10, el número de casos favorables al suceso A es igual al número de todos los casos posibles, o sea, $m = n = 10$ y $P(A) = 1$. En este caso el suceso A es cierto.

769. Una urna contiene 15 bolas: 5 blancas y 10 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna se extraiga una bola azul?

Resolución. En la urna no hay bolas azules, o sea, $m = 0$ y $n = 15$. Por consiguiente, $P(A) = 0/15 = 0$. En el caso dado el suceso A es imposible.

770. Una urna contiene 12 bolas: 3 blancas, 4 negras y 5 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna se saque una bola negra?

Resolución. Aquí $m = 4$, $n = 12$ y $P(A) = 4/12 = 1/3$.

771. Una urna contiene 10 bolas: 6 blancas y 4 negras. Se han sacado dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas salidas sean blancas?

Resolución. Aquí el número de todos los casos $n = C_{10}^2 = (10 \cdot 9)/(1 \cdot 2) = 45$. El número de los casos que favorecen el suceso A se determina por la igualdad $m = C_6^2$, o sea, $m = (6 \cdot 5)/(1 \cdot 2) = 15$. De suerte que $P(A) = 15/45 = 1/3$.

772. En una lotería hay 2000 billetes. Un billete se premia con 100 rublos, cuatro billetes con 50 rublos, diez billetes con 20 rublos, veinte billetes con 10 rublos, 165 billetes con 5 rublos y 400 billetes con 1 rublo cada uno. Los demás billetes no se premian. ¿Cuál es la probabilidad de ganar con un billete 10 rublos por lo menos?

Resolución. Aquí $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$, o sea, $P(A) = m/n = 35/2000 = 0{,}0175$.

773. Una urna contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola que lleva el número 37?

774. Una moneda se arroja dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ella ambas veces caiga de cara?

775. La primera cajita contiene bolas numeradas del 1 al 5, y la segunda, bolas numeradas del 6 al 10. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números salidos sea: 1) no menos de 7; 2) igual a 11; 3) no más de 11?

776. En una lotería hay 1000 billetes. Entre ellos 500 billetes se premian y 500 no se premian. Se han comparado dos billetes. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos billetes resulten premiados?

777. En un grupo de 30 alumnos, en un examen escrito 6 alumnos han obtenido calificación sobresaliente, 10 alumnos, calificación buena y 9 alumnos, regular. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los tres alumnos llamados a la pizarra hallan obtenido calificación de insuficiente en el examen?

§ 2. Axiomas de la suma y multiplicación de probabilidades

Se llama *unión* (o *suma*) de algunos sucesos aleatorios al suceso consistente en la realización de uno de los sucesos dados, por lo menos. La unión de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se designa por $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Si los sucesos que se asocian son incompatibles (no pueden producirse dos sucesos conjuntamente), entonces la *probabilidad de unir algunos sucesos es igual a la suma de probabilidades de los sucesos que se asocian (axioma de la suma de probabilidades)*:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Un suceso consistente en la no realización del suceso aleatorio A se denomina suceso *contrario* al A y se designa por $\overline{A}$.

La unión de los sucesos A y $\overline{A}$ da un suceso cierto y puesto que los sucesos A y $\overline{A}$ son incompatibles, entonces

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \quad \text{o bien} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Si como resultado de la prueba dada puede producirse sólo uno de los sucesos incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, entonces $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman el llamado *grupo completo de sucesos*. Como la unión de los sucesos de un grupo completo es un suceso cierto, para tales sucesos tiene lugar la igualdad

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Se llama *coincidencia* (o *producto*) de dos sucesos aleatorios A_1 y A_2 a un suceso compuesto consistente en la realización simultánea o sucesiva de ambos sucesos. La coincidencia de los acontecimientos A_1 y A_2 se designa por A_1A_2.

Por *probabilidad condicional* del suceso A_2 respecto al suceso A_1 [se designa por $P(A_2/A_1)$] se entiende la probabilidad de producción del suceso A_2 suponiendo de que el suceso A_1 tuvo lugar.

La probabilidad de coincidencia de dos sucesos A_1 y A_2 es igual al producto de la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad condicional del segundo respecto al primero (axioma de multiplicación de probabilidades):

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1/A_2).$$

Dos sucesos aleatorios A_1 y A_2 se llaman *independientes* si la probabilidad condicional de uno de ellos respecto al otro es igual a la probabilidad incondicional de este mismo suceso: $P(A_2/A_1) = P(A_2)$. En este caso tienen lugar las igualdades:

$$P(A_2/\overline{A_1}) = P(A_2/A_1) = P(A_2); \quad P(A_1/\overline{A_2}) = P(A_1/A_2) = P(A_1).$$

Para los sucesos independientes la probabilidad de su coincidencia es igual al producto de sus probabilidades:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

La coincidencia de n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (que se define análogamente) se designa por $A_1A_2 \ldots A_n$.

La probabilidad condicional del suceso A_k determinada en la suposición de que se han producido los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ se designa por

$P(A_k/A_1A_2 \ldots, A_{k-1})$. La probabilidad de coincidencia de n sucesos según el axioma de multiplicación de probabilidades se determina por la fórmula

$$P(A_1, A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) \ldots$$
$$\ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Se dice que n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son *independientes en su conjunto*, si en la probabilidad de realización de cada uno de ellos no ejerce influencia la manifestación de cualesquiera otros, tomados en una combinación cualquiera.

La probabilidad de coincidencia de n sucesos independientes en su conjunto es igual al producto de sus probabilidades:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

778. Una urna contiene 10 bolas blancas, 15 negras, 20 azules y 25 rojas. Se ha sacado una bola. Hallar la probabilidad de que la bola salida sea: blanca; negra; azul; roja; blanca o negra; azul o roja; blanca, negra o azul.

Resolución. Tenemos $n = 10 + 15 + 20 + 25 = 70$, $P(B) = 10/70 = 1/7$, $P(N) = 15/70 = 3/14$, $P(A) = 20/70 = 2/7$, $P(R) = 25/70 = 5/14$. Utilizando el axioma de la suma de probabilidades, obtenemos

$$P(B+N) = P(B) + P(N) = 1/7 + 3/14 = 5/14;$$
$$P(A+R) = P(A) + P(R) = 2/7 + 5/14 = 9/14;$$
$$P(B+N+A) = 1 - P(R) = 1 - 5/14 = 9/14.$$

779. La primera cajita contiene 2 bolas blancas y 10 negras; la segunda cajita, 8 bolas blancas y 4 negras. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean blancas?

Resolución. En el caso dado se trata de la coincidencia de los sucesos A y B, donde el suceso A es la salida de una bola blanca de la primera cajita y el suceso B es la salida de una bola blanca de la segunda cajita. Con ello A y B son sucesos independientes. Tenemos $P(A) = 2/12 = 1/6$, $P(B) = 8/12 = 2/3$. Aplicando el axioma de multiplicación de probabilidades, encontramos

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = (1/6)\cdot(2/3) = 1/9.$$

780. Con las condiciones del problema precedente, determinar la probabilidad de que una de las bolas sacadas sea blanca y la otra negra.

Resolución. Sean:
el suceso A, la salida de una bola blanca de la primera cajita;
el suceso B, la salida de una bola blanca de la segunda cajita;
el suceso C, la salida de una bola negra de la primera cajita $(C = \overline{A})$
el suceso D, la salida de una bola negra de la segunda cajita $(D = \overline{B})$.
Entonces $P(A) = 1/6$, $P(B) = 2/3$, $P(C) = P(\overline{A}) = 1 - 1/6 = 5/6$, $P(D) = P(\overline{B}) = 1 - 2/3 = 1/3$.

Determinemos la probabilidad de que la bola sacada de la primera cajita sea blanca y la sacada de la segunda cajita sea negra. Aplicamos el axioma de la suma de probabilidades:

$$P(AD) = P(A)\cdot P(D) = (1/6)\cdot(1/3) = 1/18.$$

Determinemos la probabilidad de que la bola sacada de la primera cajita sea negra y la sacada de la segunda cajita sea blanca:

$$P(BC) = P(B)\cdot P(C) = (2/3)\cdot(5/6) = 5/9.$$

Determinamos ahora la probabilidad de que la bola sacada de una cajita (no importa si de la primera o de la segunda) resulte blanca y la sacada de la otra cajita, negra. Aplicamos el axioma de multiplicación de probabilidades:

$$P = P(AD) + P(BC) = 1/18 + 5/9 = 11/18.$$

781. Una cajita contiene 6 bolas blancas y 8 negras. De la cajita se han sacado dos bolas (sin reposición). Hallar la probabilidad de que ambas bolas sean blancas.

Resolución. Sean el suceso A la salida de una bola blanca en la primera extracción, y el B, la salida de una bola blanca en la segunda extracción. Según el axioma de multiplicación de probabilidades para el caso de sucesos dependientes tenemos $P(AB) = P(A)\cdot P(B/A)$. Pero $P(A) = 6/(6+8) = 6/14 = 3/7$ (la probabilidad de que la primera bola sacada sea blanca); $P(B/A) = (6-1)/6+8-1) = 5/13$ (la probabilidad de salir una segunda bola blanca suponiendo que se extrajo la primera). Por consiguiente, $P(AB) = (3/7)\cdot(5/13) = 15/91$.

782. Tres tiradores disparan contra un blanco. La probabilidad de que el primer tirador dé en el blanco es igual a 0,75, para el segundo tirador esta probabilidad es de 0,8 y para el tercero, de 0,9. Determinar la probabilidad de que los tres tiradores den simultáneamente en el blanco.

Resolución. Tenemos

$$P(A) = 0{,}75, \quad P(B) = 0{,}8, \quad P(C) = 0{,}9;$$
$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = 0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

783. Con los datos del problema precedente, determinar la probabilidad de que dé en el blanco al menos un tirador.

Resolución. Aquí $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ (la probabilidad de que yerre el blanco el primer tirador); $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ (la probabilidad de que yerre el blanco el segundo tirador); $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ (la probabilidad de que yerre el blanco el tercer tirador); entonces $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ — o sea, la probabilidad de que yerren el blanco simultáneamente todos los tres tiradores se determina por el modo siguiente:

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) = 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}005.$$

Pero el suceso contrario del suceso $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ es el consistente en que al menos un solo tirador dé en el blanco. Por consiguiente, la probabilidad buscada $P = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, o sea, $P = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

784. La probabilidad de que una máquina herramienta se estropee en el transcurso de un día de trabajo es igual a α (α es un número positivo pequeño cuyo cuadrado se puede despreciar). ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina herramienta no se estropee ninguna vez durante 5 días? Resolver el problema para $\alpha = 0{,}01$.

Resolución. Puesto que $1 - \alpha$ es la probabilidad de que la máquina herramienta no se estropee en el transcurso de un día, entonces, según el axioma de multiplicación de probabilidades, $(1-\alpha)^5$ es la probabilidad de que la máquina no se deteriore durante 5 días.

Valiéndonos del desarrollo binomial y despreciando los términos que contienen α^2, α^3, α^4 y α^5, obtenemos la igualdad aproximada $(1-\alpha)^5 \simeq 1-5\alpha$, o sea, $P \simeq 1-5\alpha$. Para $\alpha = 0{,}01$, tenemos $P \simeq 0{,}95$.

785. Una cajita contiene a bolas blancas y b negras. ¿Cuál es la probabilidad de que de dos bolas sacadas una sea blanca y la otra negra? (La bola sacada no vuelve a meterse en la cajita.)

Resolución. Sean:
el suceso A, la salida de una bola blanca en la primera extracción;
el suceso B, la salida de una bola negra en la segunda extracción;
el suceso C, la salida de una bola negra en la primera extracción;
el suceso D, la salida de una bola blanca en la segunda extracción.
Calculamos la probabilidad de que la primera bola salida sea blanca y la segunda negra:

$$P_1 = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Hallamos la probabilidad de que la primera bola salida sea negra y la segunda blanca:

$$P_2 = P(C)\cdot P(D/C) = \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

De este modo, la probabilidad de que una de las bolas sacadas sea blanca y la otra sea negra se determinará por el axioma de la suma: $P = P_1 + P_2$, o sea,

$$P = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

786. Una cajita contiene a bolas blancas, b negras y c azules. Se ha sacado una bola. Determinar la probabilidad de que la bola extraída sea: 1) blanca; 2) negra; 3) azul; 4) blanca o negra; 5) blanca o azul; 6) negra o azul.

787. La primera cajita contiene a bolas blancas y b negras; la segunda, c blancas y d negras. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras?

788. La probabilidad de que el primer tirador dé en el blanco es igual a p_1 y para el segundo es igual a p_2. Los tiradores disparan simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ellos dé en el blanco y el otro falle el tiro?

789. La probabilidad de que en una ciudad meridional N la temperatura en un día cualquiera del julio sea menor de 5 °C es igual a α (α es un número pequeño cuyo cuadrado se puede despreciar). ¿Cuál es la probabilidad de que durante los primeros tres días del julio la temperatura no descienda a menos de 5 °C?

790. La primera cajita contiene 1 bola blanca, 2 rojas y 3 azules; la segunda cajita contiene 2 bolas blancas, 6 rojas y 4 azules. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las bolas salidas no hayan bolas azules?

791. La probabilidad de que en el transcurso de un día no se estropee un torno sea igual a 0,03. ¿Cuál es la probabilidad de que durante cuatro días seguidas no tenga lugar ningún deterioro?

792. En un aula hay 12 niños y 18 niñas. Hace falta elegir una delegación de dos personas. ¿Cuál es la probabilidad (si la elección se efectúa al azar) de que resulten escogidos: 1) dos niños; 2) dos niñas; 3) una niña y un niño?

793. Una urna contiene 9 bolas blancas y 1 negra. Se extraen tres bolas conjuntamente. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean blancas?

794. Se efectúan tres disparos contra un blanco. La probabilidad de hacer el impacto en cada disparo es igual a 0,5. Hallar la probabilidad de que como resultado de estos disparos se logre un solo impacto.

§ 3. Fórmula de Bernoulli. El número más probable de realización de un evento

Si se efectúan n pruebas independientes en cada una de las cuales la probabilidad de realización del evento (suceso) A es la misma e igual a p, entonces la probabilidad de que el suceso A tenga lugar en estas n pruebas m veces se expresa por la *fórmula de Bernoulli*

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m},$$

donde $q=1-p$. De este modo,

$$P_{0,n}=q^n, \quad P_{1,n}=npq^{n-1}, \quad P_{2,n}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^2\cdot q^{n-2}, \ \ldots, \ P_{n,n}=p^n.$$

El número m_0 se llama *número más probable* de realización del evento A en n pruebas, si el valor de $P_{m,n}$ para $m=m_0$ no es menor de los demás valores de $P_{m,n}$, o sea, $P_{m_0,n}\geqslant P_{m_i,n}$ cuando $m_i\neq m_0$.

Si $p\neq 0$ y $p\neq 1$, entonces el número m_0 se puede determinar de la desigualdad doble

$$np-q\leqslant m_0\leqslant np+p.$$

En esta desigualdad doble la diferencia de los valores de frontera es igual a 1. Si $np+p$ no es un número entero, la desigualdad doble define únicamente un solo valor más probable de m_0. Pero si $np+p$ es un número entero, entonces hay dos valores más probables: $m_0'=np-q$ y $m_0''=np+p$.

795. Una urna contiene 20 bolillas blancas y 10 negras. Se han sacado seguidamente 4 bolas, con ello cada bolilla salida se repone y se mezclan las bolillas en la urna antes de extraer la siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las cuatro bolillas salidas dos sean blancas?

Resolución. La probabilidad de extraer una bolilla blanca $p=20/30=2/3$ se puede considerar igual para las cuatro pruebas; $q=1-p=1/3$. Utilizando la fórmula de Bernoulli, obtenemos

$$P_{2,4}=C_4^2p^2q^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}.$$

796. La probabilidad de que se produzca el evento A es igual a 0,4. ¿Cuál es la probabilidad de que en 10 pruebas el suceso A se realice no más de tres veces?

Resolución. Aquí $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Tenemos:
la probabilidad de que el evento A se produzca: 0 veces es $P_{0,10} = q^{10}$;

$$1 \text{ vez es } P_{1,10} = 10pq^9;$$
$$2 \text{ veces es } P_{2,10} = 45p^2q^8;$$
$$3 \text{ veces es } P_{3,10} = 120p^3q^7;$$

no más de tres veces es igual a

$$P = P_{0,10} + P_{1,10} + P_{2,10} + P_{3,10},$$

o sea,

$$P = q^{10} + 10pq^9 + 45p^2q^8 + 120p^3q^7, \quad \text{o bien}$$
$$P = q^7 (q^3 + 10q^2p + 45qp^2 + 120p^3).$$

Suponiendo $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, obtenemos

$$P = 0{,}6^7 (0{,}216 + 1{,}44 + 4{,}32 + 7{,}68) \simeq 0{,}38.$$

797. Determinar la probabilidad de que en una familia que tiene cinco hijos haya tres niñas y dos niños. Las probabilidades de nacimiento de un niño y de una niña se suponen iguales.

Resolución. La probabilidad de nacimiento de una niña $p = 0{,}5$, entonces $q = 1 - p = 0{,}5$ (probabilidad de nacimiento de un niño). Por lo tanto, la probabilidad buscada

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^2 = \frac{5}{16}.$$

798. Dejando vigentes los datos del problema precedente, hallar la probabilidad de que entre los hijos no haya más de tres niñas.

Resolución. Tenemos

$$P_{0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}; \quad P_{1,5} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32};$$
$$P_{2,5} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}; \quad P_{3,5} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16};$$
$$P = P_{0,5} + P_{1,5} + P_{2,5} + P_{3,5} = \frac{13}{16}.$$

799. Una moneda se arroja 8 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ella caiga de cara 6 veces?

800. Una moneda se arroja 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga de cara no más de tres veces?

801. En un aula hay 20 niños y 10 niñas. A cada una de tres preguntas hechas por el maestro ha respuesto un alumno. ¿Cuál es la probabilidad de que entre quienes respondieron haya dos niños y una niña?

802. En cada una de cuatro cajitas hay 5 bolillas blancas y 15 negras. De cada cajita han sacado una. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos bolillas blancas y dos negras?

803. Una urna contiene 10 bolillas blancas y 40 negras. Se sacan seguidamente 14 bolillas, con ello el color de cada una se registra y luego la bolilla se repone en la urna. Determinar el número más probable de salidas de una bolilla blanca.

Resolución. Aquí $n = 14$, $p = 10/50 = 1/5$, $q = 1 - p = 4/5$. Utilizando la desigualdad doble $np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p$ para los valores indicados de n, p y q, obtenemos

$$14/5 - 4/5 \leqslant m_0 \leqslant 14/5 + 1/5, \quad \text{o sea,} \quad 2 \leqslant m_0 \leqslant 3.$$

Por lo tanto, el problema tiene dos soluciones: $m_0' = 2$, $m_0'' = 3$.

804. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es igual a 0,7. Se han efectuado 25 disparos. Determinar el número más probable de impactos.

Resolución. Aquí $n = 25$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Por consiguiente,

$$25 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \leqslant m_0 \leqslant 25 \cdot 0{,}7 + 0{,}7, \quad \text{o sea,} \quad 17{,}2 \leqslant m_0 \leqslant 18{,}2.$$

Como m es un número entero, $m_0 = 18$.

805. Como resultado de observaciones hechas durante muchos años, ha sido establecido que la probabilidad de que llueva el 1 de octubre en una ciudad dada es igual a 1/7. Determinar el número más probable de días lluviosos el 1 de octubre en esta ciudad durante 40 años.

Resolución. Tenemos $n = 40$, $p = 1/7$, $q = 6/7$. De este modo,

$$40 \cdot \frac{1}{7} - \frac{6}{7} \leqslant m_0 \leqslant 40 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7}, \quad 4\frac{6}{7} \leqslant m_0 \leqslant 5\frac{6}{7}, \quad \text{o sea,} \quad m_0 = 5.$$

806. Hay 20 cajones de piezas homogéneas. La probabilidad de que en un cajón tomado al azar las piezas sean estándares es igual a 0,75. Hallar el número más probable de cajones en los cuales todas las piezas son estándares.

807. Una urna contiene 100 bolillas blancas y 80 negras. De la urna se sacan n bolillas (reponiendo en la urna cada bolilla salida). El número más probable de salidas de una bolilla negra es igual a 11. Hallar n.

Resolución. De la desigualdad doble $np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p$ resulta que

$$(m_0 - p)/p \leqslant n \leqslant (m_0 + q)/p.$$

Aquí $m_0 = 11$, $p = 100/180 = 5/9$, $q = 4/9$; por consiguiente,

$$\frac{11 - 5/9}{5/9} \leqslant n \leqslant \frac{11 + 4/9}{5/9}, \quad \text{o sea,} \quad 18.8 \leqslant n \leqslant 20.6.$$

De suerte que el problema tiene dos soluciones: $n_1 = 19$, $n_2 = 20$.

808. ¿Se puede en el problema precedente cambiar los valores numéricos de m_0 y p de modo que no tenga soluciones?

809. El primer obrero puede fabricar durante un turno 120 artículos y el segundo, 140 artículos, con ello las probabilidades de que estos artículos sean de calidad superior son 0,94 y 0,8 respectivamente. Determinar el número más probable de piezas de calidad superior fabricadas por cada obrero.

810. Hay 100 urnas llenas de bolillas blancas y negras. La probabilidad de que salga una blanca de cada urna es igual a 0,6. Hallar el número más probable de urnas en las cuales todas las bolillas sean blancas.

§ 4. Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes

Si es sabido que el evento A puede acaecer junto con uno de los sucesos $H_1, H_2, \ldots, H_n$ que forman un grupo completo de eventos incompatibles, entonces A se puede representar como unión de los eventos $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$, o sea, $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. La probabilidad del evento A puede ser determinada por la fórmula

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n),$$

o bien

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Esta fórmula se llama *fórmula de la probabilidad total.*

La probabilidad condicional del evento H_i, suponiendo que el evento A tiene lugar, se determina por la *fórmula de Bayes:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A/H_i) \cdot P(H_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Las probabilidades $P(H_i/A)$ calculadas por la fórmula de Bayes se llaman frecuentemente *probabilidades de las hipótesis.*

811. Hay cuatro urnas. La primera contiene 1 bolilla blanca y 1 negra; la segunda, 2 blancas y 3 negras; la tercera, 3 bolillas blancas y 5 negras; la cuarta, 4 blancas y 7 negras. El suceso H_i es la elección de la i-ésima urna ($i = 1, 2, 3, 4$). Se sabe que la probabilidad de la elección de la i-ésima urna es igual a $i/10$, o sea, $P(H_1) = 1/10$, $P(H_2) = 1/5$, $P(H_3) = 3/10$, $P(H_4) = 2/5$. Se escoge al azar una de las urnas y se saca de ella una bolilla. Hallar la probabilidad de que ella sea blanca.

Resolución. De los datos resulta que $P(A/H_1) = 1/2$ (la probabilidad condicional de que se estraiga la bolilla blanca de la primera urna); análogamente, $P(A/H_2) = 2/5$, $P(A/H_3) = 3/8$, $P(A/H_4) = 4/11$. La probabilidad de que salga una bolilla blanca se determina por la fórmula de la probabilidad total:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3) \cdot P(A/H_3) + P(H_4) \cdot P(A/H_4) =$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{1707}{4400}.$$

812. Hay tres cajitas iguales. La primera contiene 20 bolillas blancas; la segunda, 10 blancas y 10 negras; la tercera, 20 negras. De una cajita escogida al azar se ha extraído una bolilla blanca. Calcular la probabilidad de que ella se haya sacado de la primera cajita.

Resolución. Sean H_1, H_2, H_3 las hipótesis consistentes en la elección de la primera, segunda y tercera cajita, respectivamente; el evento A es la salida de una bolilla blanca. Entonces $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$ (la elección de cualquiera de las cajitas es equiposible); $P(A/H_1) = 1$ (la probabilidad de que una bolilla blanca se extraiga de la primera cajita), $P/A/H_2) = 10/20 = 1/2$ (la probabilidad de que una bolilla blanca se extraiga de la segunda cajita), $P(A/H_3) = 0$ (la probabilidad de que una bolilla blanca se extraiga de la tercera cajita).

La probabilidad buscada $P(H_2/A)$ se determina por la fórmula de Bayes:

$$P(H_1/A) = \frac{1\cdot(1/3)}{1\cdot(1/3)+(1/2)\cdot(1/3)+0\cdot(1/3)} = \frac{2}{3}.$$

813. Un cajón contiene N artículos, entre ellos los hay desechados. El artículo escogido al azar está en buen estado. Determinar la probabilidad de que: todos los artículos contenidos en el cajón estén en buen estado; $N - 1$ artículos estén en buen estado y un artículo esté desechado; $N - 2$ artículos estén en buen estado y dos artículos estén desechados; . . .; todos los N artículos en el cajón estén desechados.

Resolución. Las hipótesis antes del experimento son las siguientes: H_0, o sea, todos los artículos en el cajón están en buen estado; H_1, o sea, un artículo está desechado; H_2, o sea, dos artículos están desechados; . . .; H_N, o sea, todos los artículos están desechados. El suceso A consiste en la salida de un artículo en buen estado. Se requiere hallar $P(H_0/A)$, $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$ . . . . . ., $P(H_N/A)$.

Supongamos que antes del experimento todas las hipótesis son equiposibles:

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) \ldots = P(H_N) = \frac{1}{N+1},$$

o sea,

$$P(A/H_0) = 1, \quad P(A/H_1) = \frac{N-1}{N}, \quad P(A/H_2) = \frac{N-2}{N}, \ldots,$$

$$P(A/H_{N-1}) = \frac{1}{N}, \quad P(A/H_N) = 0.$$

De ello encontramos

$$P(H_0/A) = \frac{1\cdot\frac{1}{N+1}}{1\cdot\frac{1}{N+1}+\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+0\cdot\frac{1}{N+1}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\ldots+\frac{N-1}{N}+1} = \frac{N}{1+2+\ldots+N-1+N} = \frac{2}{N+1}.$$

Análogamente obtenemos

$$P(H_1/A) = \frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N}, \quad P(H_2/A) = \frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-2}{N}, \ldots,$$

$$P(H_N/A) = \frac{2}{N+1}\cdot 0 = 0.$$

814. La primera urna contiene 5 bolillas blancas y 10 negras y la segunda, 3 blancas y 7 negras. Se ha metido en la primera urna una bolilla sacada de la segunda, y luego de la primera urna se ha extraído al azar una bolilla. Determinar la probabilidad de que la bolilla sacada sea blanca.

Resolución. Después de pasar una bolilla de la segunda urna a la primera en esta última hay dos conjuntos de bolillas 1) 5 blancas y 10 negras que desde el principio se encuentran en ella; 2) una bolilla procedente de la segunda urna. La probabilidad de que una bolilla blanca salga del primer conjunto es $P(A/H_1) = 5/15 = 1/3$ y la de que una bolilla así salga del segundo conjunto es $P(A/H_2) = 3/10$. La probabilidad de que una bolilla arbitrariamente extraída pertenezca al primer conjunto constituye $P(H_1) = 15/16$ y la de que ella pertenezca al segundo conjunto es $P(H_2) = 1/16$.

Utilizando la fórmula de la probabilidad total, obtenemos

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{10} = \frac{53}{160}.$$

815. La primera urna contiene 1 bolilla blanca y 2 negras y la segunda, 100 blancas y 100 negras. De la segunda urna se ha pasado a la primera una bola y luego de la primera urna se ha sacado al azar una bolilla. ¿Cuál es la probabilidad de que al bolilla salida se encontrara antes en la segunda urna, si se sabe que ella es blanca?

§ 5 Variable aleatoria y la ley de su distribución

Si a cada evento elemental A de cierto conjunto de sucesos se le puede poner en correspondencia una magnitud determinada $X = X(A)$, entonces se dice que está definida una variable *aleatoria*. La variable aleatoria X se puede considerar como función del evento A con campo de definición ω.

Una variable aleatoria puede tomar uno u otro valor de cierto conjunto numérico; sin embargo, no se conoce de antemano, cuál es precisamente este valor. Las variables aleatorias suelen designarse con las letras mayúsculas $X, Y, \ldots$, y los valores tomados por ellas, con las minúsculas respectivas $x, y, \ldots$.

Si los valores que puede tomar la variable aleatoria dada X forman una serie discreta *) (finita o infinita) de números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, entonces la propia variable aleatoria X se llama *discreta*.

Sin embargo, si los valores que puede tomar la variable aleatoria dada X llenan un intervalo entero finito o infinito $]a, b[$ del eje numérico Ox, la variable aleatoria se denomina *continua*.

A cada valor de una variable aleatoria del tipo x_n le corresponde una probabilidad determinada p_n; a cada intervalo $]a, b[$ del campo de valores de una variable aleatoria del tipo continuo le corresponde una probabilidad determinada $P(a < X < b)$ de que el valor tomado por la variable aleatoria se encuentre en este intervalo.

La relación que establece de uno u otro modo el enlace entre valores posibles de una magnitud aleatoria y las probabilidades de los mismos se llama *ley de distribución* de la variable aleatoria.

---

*) Una serie finita o infinita de números se llama *discreta*, si a cada número x_n de esta serie se le puede poner en correspondencia un intervalo $]a_n, b_n[$ dentro del cual no hay otros números de la serie dada.

La ley de distribución de una variable aleatoria discreta se define generalmente por la serie de distribución:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Con ello $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, donde la sumación se extiende sobre todo el conjunto (finito o infinito) de valores posibles de la variable aleatoria X dada.

La ley de distribución de una variable aleatoria continua es cómodo definirla con ayuda de la llamada *función de densidad de la probabilidad* $f(x)$. La probabilidad P $(a < X < b)$ de que el valor tomado por la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $]a, b[$ se determina por la igualdad

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

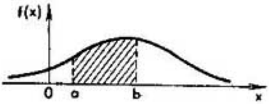

Fig. 35

El gráfico de la función $f(x)$ se denomina *curva de distribución*. Geométricamente la probabilidad de que una variable aleatoria se encuentre en el intervalo $]a, b[$ es igual al área del trapecio curvilíneo correspondiente limitado por la curva de distribución, el eje Ox y las rectas $x = a$, $x = b$ (fig. 35).

La función de densidad de la probabilidad $f(x)$ posee las propiedades siguientes:

1ª. $f(x) \geqslant 0$.

2ª. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

(si todos los valores de la variable aleatoria X se hallan comprendidos en el intervalo $]a, b[$, entonces la última propiedad se puede escribir en la forma) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$).

Examinemos ahora la función $F(x) = P(X < x)$. Ella se llama *función de distribución de la probabilidad* de la variable aleatoria X. La función $F(x)$ sxiste tanto para variables aleatorias discretas como para continuas. Si $f(x)$ a la función de densidad de distribución de la probabilidad de una función eleatoria continua X, entonces

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

De la última igualdad resulta que

$$(fx) = F'(x).$$

A veces la función $f(x)$ se llama *función diferencial de distribución de la probabilidad* y la función $F(x)$, *función integral de distribución de la probabilidad.*

Señalemos las propiedades más importantes de la función de distribución de una probabilidad:

1ª $F(x)$ es una función no decreciente.

2ª. $F(-\infty) = 0$.

3ª. $F(+\infty) = 1$.

816. Se dan las probabilidades de valores de una variable aleatoria X: el valor 10 tiene la probabilidad igual a 0,3; el 2, la probabilidad 0,4; el 8 la probabilidad 0,1; el valor 4, la probabilidad 0,2. Construir la serie de distribución de la variable aleatoria X.

Resolución. Situando los valores de la variable aleatoria en el orden creciente, obtenemos una serie de distribución:

x_i	2	4	8	10
p_i	0,4	0,2	0,1	0,3

Tomemos sobre el plano xOp los puntos (2; 0,4), (4; 0,2), etc. Uniendo los puntos sucesivos por segmentos rectilíneos, obtenemos el así llamado polígono de distribución de la variable aleatoria X (fig. 36).

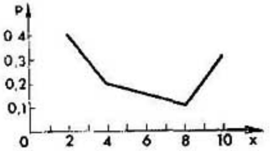

Fig. 36

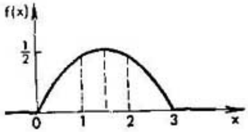

Fig. 37

817. La variable aleatoria X está subordinada a una ley de distribución con densidad $f(x)$, con ello

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<0; \\ a(3x-x^2), & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 3; \\ 0, & \text{si } x>3. \end{cases}$$

Se exige: 1) hallar el coeficiente a; 2) construir el gráfico de distribución de la densidad $y = f(x)$; 3) hallar la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo $]1, 2[$.

Resolución. 1) Como todos los valores de la variable aleatoria dada se hallan comprendidos en el segmento $[0, 3]$, entonces $\int_0^3 a(3x-x^2)\,dx = 1$, de donde

$$a\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=1, \quad \text{o bien} \quad a\left(\frac{27}{2}-9\right)=1, \quad \text{o sea,} \quad a=\frac{2}{9}.$$

2) El gráfico de la función $f(x)$ en el intervalo $]0, 3[$ es la parábola $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2$ y fuera de este intervalo, de gráfico sirve el propio eje de las abscisas (fig. 37).

3) La probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $]1, 2[$ se determina por la igualdad

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27}.$$

818. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Construir la función de distribución de la probabilidad de esta variable aleatoria.

Resolución. Si $x \leqslant 10$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0$;
si $10 < x \leqslant 20$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2$;
si $20 < x \leqslant 30$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,5$;
si $30 < x \leqslant 40$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 = 0,85$;
si $40 < x \leqslant 50$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 = 0,95$;
si $x > 50$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 + 0,5 = 1$.

819. La variable aleatoria X está definida por la función de distribución (por la función integral)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1; \\ (x-1)/2, & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3; \\ 1, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en los intervalos $]1,5; 2,5[$ y $]2,5; 3,5[$.

Resolución. Tenemos

$P_1 = F(2,5) - F(1,5) = (2,5 - 1)/2 - (1,5-1)/2 = 0,75 - 0,25 = 0,5$,
$P_2 = F(3,5) - F(2,5) = 1 - (2,5 - 1)/2 = 1 - 0,75 = 0,25$.

820. La variable aleatoria X está definida por la función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<2; \\ (x-2)^2, & \text{si} \quad 2\leqslant x\leqslant 3; \\ 1, & \text{si} \quad x>3. \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en los intervalos $]1;\ 2{,}5[$ y $]2{,}5;\ 3{,}5[$.

Resolución. Tenemos

$$P_1=F(2{,}5)-F(1)=(2{,}5-2)^2-0=0{,}25,$$
$$P_2=F(3{,}5)-F(2{,}5)=1-(2{,}5-2)^2=1-0{,}25=0{,}75.$$

821. La variable aleatoria X está definida por la función de distribución indicada en el problema precedente. Hallar la densidad de distribución (función diferencial de distribución) de la variable aleatoria.

Resolución. La densidad de distribución es igual a la derivada de la función de distribución, o sea, $f(x)=F'(x)$, por eso

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<2 \\ 2(x-2), & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 3; \\ 0, & \text{si } x>3. \end{cases}$$

822. Un tirador ejecuta tres disparos contra un blanco. La probabilidad de que dé en el blanco a cada disparo es igual a 0,3. Construir la serie de distribución del número de impactos certeros.

Indicación: valerse de la fórmula de Bernoulli.

823. En una urna hay cuatro bolillas numeradas del 1 al 4. Se extraen dos bolillas. La variable aleatoria X es la suma de los números que llevan las bolillas. Construir la serie de distribución de la variable aleatoria X.

824. La variable aleatoria X está subordinada a la ley de distribución con la densidad

$$f(x)=\begin{cases} a/\sqrt{a^2-x^2}, & \text{si} \quad |x|<a; \\ 0, & \text{si} \quad |x|\geqslant a. \end{cases}$$

Se exige: 1) hallar el coeficiente a; 2) hallar la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $]a/2,\ a[$; 3) construir el gráfico de distribución de la densidad de la probabilidad.

825. Mostrar que la función $f(x)=1/(x^2+\pi^2)$ es la densidad de la probabilidad de cierta variable aleatoria X y calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $]\pi,\ \infty[$.

826. Se da la función de la densidad de distribución de la variable aleatoria X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<0; \\ a \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant \pi; \\ 0, & \text{si} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Determinar a y $F(x)$.

827. En una urna hay 5 bolillas blancas y 25 negras. Se extrae una bolilla. La variable aleatoria X es el número de las bolillas blancas extraídas. Construir la función de distribución $F(x)$.

§ 6. Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria

Se llama *esperanza matemática de una variable aleatoria discreta* a la suma de los productos de los valores de la variable aleatoria por la probabilidad de estos valores.

Si una variable aleatoria X se caracteriza por una serie finita de distribución:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

entonces la esperanza matemática $M(X)$ se determina por la fórmula

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n, \text{ o bien } M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \qquad (1)$$

Como $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, entonces

$$M(x)=\frac{x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

Ahora bien, $M(X)$ es la media aritmética ponderada de los valores de la variable aleatoria $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para los pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Si $n=\infty$, entonces

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$$

(a condición de que la suma de esta serie sea finita).

El concepto de esperanza matemática se extiende también a las variables aleatorias continuas. Sea $f(x)$ la densidad de la probabilidad de una variable aleatoria X. Entonces *la esperanza matemática de la variable aleatoria continua* X se determina por la igualdad

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

(a condición de que el valor de esta integral sea finito).

En lo que se refiere a la interpretación geométrica, la esperanza matemática, tanto de una variable aleatoria continua como discreta, es igual a la abscisa del centro de gravedad del área acotada por la curva (o el polígono) de distribución y el eje de abscisas. Por eso cuando la curva (o el polígono) de distribución es simétrica respecto a cierta recta paralela al eje de ordenadas, la esperanza matemática coincide con la abscisa del punto de intersección de este eje de simetría con el eje de las abscisas.

El punto del eje Ox cuya abscisa es igual a la esperanza matemática de una magnitud aleatoria, suele llamarse *centro de distribución* de esta magnitud aleatoria.

Se denomina *varianza* de una variable aleatoria a la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de esta variable con respecto a su esperanza matemática:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

La varianza de una magnitud aleatoria es una medida de la dispersión de sus valores alrededor de su esperanza matemática.

Si introducimos la designación $M(X) = m$, las fórmulas para calcular la varianza de la variable aleatoria discreta X se escribirán en la forma

$$\left.\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - m)^2, \\ D(X) &= \sum_{i=1} p_i (x_i - m)^2 \quad (\text{para } n = \infty), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

mientras que para una variable aleatoria continua X la fórmula tendrá el aspecto

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)\, dx. \tag{3}$$

Para la varianza de una variable aleatoria es válida la fórmula

$$D(X) = [M(X - a)^2] - [M(X) - a]^2 \tag{4}$$

o bien

$$D(X) = [M(x - a)^2] - (m - a)^2,$$

donde a es un número arbitrario. Esta fórmula se utiliza frecuentemente para calcular la varianza de una magnitud aleatoria, ya que generalmente es más fácil determinarla por ella que por (2) y (3).

Se llama *desviación típica* (*estándar*) de una variable aleatoria a la magnitud $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

828. Se da la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ (1/2) \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0, & \text{si} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Mostrar que $f(x)$ puede servir de densidad de probabilidad de cierta variable aleatoria X. Hallar la espranza matemática y la varianza de la variable aleatoria X.

Resolución. Tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=1.$$

Además, $f(x)\geqslant 0$. Por consiguiente, $f(x)$ puede servir de densidad de probabilidad de cierta variable aleatoria. Puesto que la recta $x=\pi/2$ es el eje de sime-

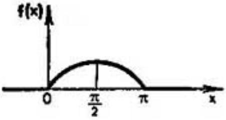

Fig. 38

tría del arco correspondiente de la curva $y=(1/2)\operatorname{sen} x$ (fig. 38), la esperanza matemática de la variable aleatoria X es igual a $\pi/2$, o sea $M(X)=\pi/2$.

Hallemos la varianza. Para esto en la fórmula (4) hacemos $a=0$, $M(X)=\pi/2$, entonces queda sólo calcular la integral que determina $M(X^2)$; tenemos

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\operatorname{sen} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x+2x\operatorname{sen} x+2\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}(\pi^2-4).$$

Por eso

$$D(X)=\frac{1}{2}(\pi^2-4)-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}-2,$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\approx 0{,}69.$$

829. La variable aleatoria X se caracteriza por la serie de distribución:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Determinar la esperanza matemática y la varianza.

Resolución. Por la fórmula (1) encontramos la esperanza matemática:

$$M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}08+4\cdot 0{,}02=1{,}32.$$

Vamos a determinar la varianza con ayuda de la fórmula (4), tomando $a=2$; de ello $M(X)-a=1{,}32-2=-0{,}68$. Construimos la tabla:

x_i	0	1	2	3	4
x_i-a	-2	-1	0	1	2
$(x_i-a)^2$	4	1	0	1	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02
$p_i(x_i-a)^2$	0,8	0,4	0	0,08	0,08

Ahora hallamos

$$M[(X-a)^2]=\sum_{i=0}^{4} p_i(x_i-a)^2=1,36$$

$$D(X)=1,36-(-0,68)^2=1,36-0,4634=0,8966;$$

$$\sigma_x=\sqrt{0,8966}=0,95.$$

830. Una urna contiene 6 bolillas blancas y 4 negras. De ella se extrae, una bolilla que luego se repone en la urna y las bolillas se mezclan. Esta operación se repite cinco veces. Tomando por variable aleatoria X el número de bollilas blancas extraídas, es necesario determinar la ley de distribución de esta magnitud, su esperanza matemática y su varianza.

831. Se la da función

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<0; \\ \lambda(4x-x^3), & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 2; \\ 0, & \text{si} \quad x>2. \end{cases}$$

¿Para qué valor de λ la función $f(x)$ puede ser tomada por densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria X? Determinar este valor de λ, hallar la esperanza matemática y la desviación típica de la variable aleatoria respectiva X.

§ 7. Moda y mediana

Se llama *moda de una variable aleatoria discreta* X a su valor más probable. Se llama *moda de una variable aleatoria continua* X a su valor con densidad de distribución máxima. Designamos la moda con el símbolo $\overline{M}$.

Se denomina *mediana* de una variable aleatoria continua X a su valor μ tal, para el cual es igualmente probable que la variable aleatoria resulte menor o mayor que μ, o sea,

$$P(X<\mu)=P(X>\mu)=0,5.$$

En lo que concierne a la interpretación geométrica, la moda es la abscisa de aquel punto de la curva (polígono) de distribución con ordenada máxima. La ordenada trazada en el punto con abscisa $x = \mu$ divide por la mitad el área aco-

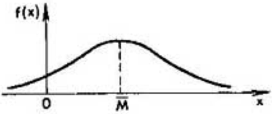

Fig. 39

tada por la curva de distribución. Si la recta $x = a$ es el eje de simetría de la curva de distribución $y = f(x)$, entonces $\overline{M} = \mu = M(X) = a$ (fig. 39).

832. Se da la densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua $f(x) = ae^{2x-x^2}$ $(a > 0)$. Hallar la moda de esta variable.

Resolución. Hallamos el máximo de la función $y = f(x)$. Para esto encontramos las derivades de primer y segundo orden:

$$f'(x) = 2a(1-x)e^{2x-x^2}, \quad f''(x) = -2ae^{2x-x^2} + 4a(1-x)^2 e^{2x-x^2}.$$

De la ecuación $f'(x) = 0$ obtenemos $x = 1$. Como $f''(1) = -2ae < 0$, entonces en $x = 1$ la función $f(x)$ presenta el máximo, o sea, $\overline{M} = 1$. No hemos determinado los valores de la constante a, puesto que el máximo de la función $f(x) = ae^{2x-x^2}$ no depende del valor numérico de a.

833. Se da la densidad de probabilidad de la variable aleatoria X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ x - x^3/4, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Hallar la mediana de esta variable aleatoria.

Resolución. Hallamos la mediana μ partiendo de la condición $P(X < \mu) = 0{,}5$. En este caso

$$P(X < \mu) = \int_0^{\mu} \left(x - \frac{1}{4}x^3\right) dx = \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{16}.$$

Así, pues, llegamos a la ecuación $\mu^2/2 = \mu^4/16 = 0{,}5$, o bien $\mu^4 - 8\mu^2 + 8 = 0$, de donde $\mu = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{8}}$. Entre las cuatro raíces de esta ecuación es necesario escoger la que está comprendida entre 0 y 2. Por lo tanto, $\mu = \sqrt{4 - \sqrt{8}} \approx 1{,}09$.

834. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria:

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

Hallar la moda.

835. Se da la densidad de distribución de la variable aleatoria:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<2; \\ a(x-2)(4-x), & \text{si} \quad 2\leqslant x\leqslant 4 \\ 0, & \text{si} \quad x>4. \end{cases}$$

Determinar el valor de a, la moda y la mediana.

§ 6. Distribución uniforme

Se dice *uniforme* a la distribución de tales variables aleatorias en las cuales todos los valores están sobre cierto segmento $[a, b]$ y tienen una densidad constante de probabilidad sobre este segmento (fig. 40). De este modo,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<a; \\ h, & \text{si} \quad a\leqslant x\leqslant b; \\ 0, & \text{si} \quad x>b. \end{cases}$$

Puesto que $h(b-a)=1$, entonces $h=1/(b-a)$ y, por consiguiente,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<a; \\ 1/(b-a), & \text{si} \quad a\leqslant x\leqslant b; \\ 0, & \text{si} \quad x>b. \end{cases}$$

836. Determinar la esperanza matemática de una variable aleatoria con distribución uniforme.

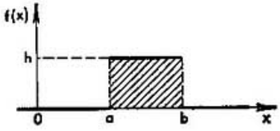

Fig. 40

Resolución. Tenemos

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2},$$

o sea, $M(X)=(a+b)/2$ que es lo que debe ser en virtud de la simetría de distribución.

837. Calcular la dispersión y la desviación típica para una variable aleatoria con distribución uniforme.

Resolución. Utilizamos la fórmula $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ teniendo en cuenta el valor de $M(X) = (a+b)/2$, hallado en el problema precedente. Por lo tanto, queda calcular $M(X^2)$; tenemos

$$M(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{3(b-a)}\,x^3\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

De donde

$$D(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Por consiguiente

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

838. Todos los valores de una variable aleatoria distribuida uniformemente están sobre el segmento $[2, 8]$. Hallar la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo $]3, 5[$.

839. Los tranvías de la línea urbana dada pasan con intervalo de 5 minutos. Un pasajero se acerca a la parada del tranvía en un momento determinado. ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero aparezca no antes que pase un minuto después de la partida del tranvía precedente y no más tarde que dos minutos antes que salga el tranvía siguiente?

§ 9. Ley de distribución binomial. Ley de Poisson

Si la probabilidad de que se produzca un evento aleatorio en cada prueba es igual a p, entonces, como es sabido, la probabilidad de que durante n pruebas el evento se produzca m veces se determina por la fórmula de Bernoulli:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (\text{donde } q = 1 - p).$$

La ley de distribución de una variable aleatoria que puede tomar $n + 1$ valor $(0, 1, \ldots, n)$, descrita por la fórmula de Bernoulli, se llama *binomial*.

La ley de distribución de una variable aleatoria X que puede tomar cualesquiera valores enteros no negativos $(0, 1, 2, \ldots, n)$, descrita por la fórmula

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!}\,e^{-a},$$

ha recibido el nombre de *ley de Poisson*.

La ley de Poisson es la de distribución de las probabilidades para las variables aleatorias siguientes.

a) Supongamos que sobre el intervalo $]0, N[$ del eje Ox se sitúan aleatoriamente n puntos, además, los eventos consistentes en que un punto llegue a parar a un segmento cualquiera, anteriormente fijado, de longitud constante (por ejemplo, de longitud unitaria) son equiprobables.

Si $N \to \infty$, $n \to \infty$ y $a = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{n}{N}$, entonces una variable aleatoria X, igual al número de puntos que llegan a parar al segmento prefijado de longitud unitaria (que puede tomar valores $0, 1, \ldots, m, \ldots$), se distribuye según la ley de Poisson.

b) Si n es igual al número medio de llamadas de los abonados que llegan durante una hora a la central telefónica dada, entonces el número de llamadas que llegan durante un minuto se distribuye aproximadamente por la ley de Poisson, con ello $a = n/60$.

La esperanza matemática y la dispersión de variables aleatorias distribuidas por la ley binomial y la ley de Poisson se determinan por las fórmulas siguientes:

para la ley binomial: $M(X) = np$; $D(X) = npq$;
para la ley de Poisson: $M(X) = a$; $D(X) = a$.

840. Una central telefónica automática recibe, por término medio durante una hora 300 llamadas. ¿Cuál es la probabilidad de que ella durante un minuto dado reciba exactamente dos llamadas?

Resolución. Durante un minuto la CTA recibe, por término medio, $300/60 = 5$ llamadas, o sea, $a = 5$. Se requiere hallar P_2. Utilizando la fórmula de Poisson, hallamos

$$P_2 = \frac{5^2}{2!}e^{-5} = \frac{25}{2e^5} \cong 0{,}09.$$

841. En un libro de 1000 páginas hay 100 erratas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una página aleatoriamente escogida haya no menos de cuatro erratas?

Resolución. La cantidad media de erratas para una página es $a = 100/1000 = 0{,}1$. En el caso dado conviene aplicar la fórmula de Poisson:

$$P_m = \frac{(0{,}1)^m}{m!}e^{-0{,}1}.$$

Aquí P_m es la probabilidad de que se tengan m erratas en una página.

Si $m = 0$, entonces $P_0 = e^{-0{,}1}$; si $m = 1$, $P_1 = 0{,}1\cdot e^{-0{,}1}$; si $m = 2$, $P_2 = 0{,}005\cdot e^{-0{,}1}$; si $m = 3$, $P_3 = 0{,}000167\cdot e^{-0{,}1}$. La suma $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ es la probabilidad de que en una página resulte no más de tres erratas. Esta suma es igual a $1{,}105167\cdot e^{-0{,}1}$. Entonces la probabilidad de que en una página escogida al azar haya cuatro erratas, como mínimo, es igual a

$$1-1{,}105167\cdot e^{-0{,}1} = 1-1{,}105167\cdot 0{,}904837 = 1-0{,}999996 = 0{,}000004.$$

842. Entre las semillas de centeno hay 0,4% de semillas de hierbas malas. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar 5000 semillas se descubran 5 semillas de hierbas malas?

843. Determinar la espreranza matemática y la dispersión de la frecuencia de m/n llegadas de un evento aleatorio durante n pruebas, si la probabilidad de que el suceso se produzca durante una prueba es igual a p.

844. Mostrar que la distribución binomial se convierte, pasando al límite, en distribución de Poisson si $n \to \infty$, $p \to 0$, pero $np = a$.

Indicación: valerse de la igualdad

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{(np)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}(1-p)^{\frac{np}{p}-m}$$

y pasar al límite.

845. Una variable aleatoria X está subordinada a la ley de distribución binomial $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. Determinar la esperanza matemática de esta variable aleatoria.

Resolución. Tenemos

$$M(X)=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=1}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=np\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}C_n^m p^{m-1}q^{n-m}.$$

Pero

$$\frac{m}{n}C_n^m=\frac{m}{n}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\dots(m-1)m}=C_{n-1}^{m-1}.$$

Por consiguiente,

$$M(X)=np\sum_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}=np(p+q)^{n-1},$$

o sea, $M(X)=np$.

846. Determinar la varianza de una variable aleatoria X subordinada a la ley de distribución binomial.

Resolución. Hallemos previamente la esperanza matemática de la variable aleatoria X^2:

$$M(X^2)=\sum_{m=1}^{n} m^2C_n^m p^m q^{n-m}=np\sum_{m=1}^{n} m\cdot\frac{m}{n}C_n^m p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}=$$

$$=np\sum_{m=1}^{n} mC_{n-1}^{m-1}p^{m-1}p^{(n-1)-(m-1)}=np\Big(\sum_{m=1}^{n}(m-1)C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}\times$$

$$\times q^{(n-1)-(m-1)}+\sum_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}\Big).$$

La primera de las sumas entre paréntesis es la esperanza matemática de la variable aleatoria X subordinada a la ley binomial $P(X=m-1)=$ $=C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}\cdot q^{(n-1)-(m-1)}$, por eso ella es igual a $(n-1)p$ (véase el problema precedente). La segunda suma es igual a $(p+q)^{n-1}=1$.
De suerte que $M(X^2)=np(n-1)p+np$. Pero $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$, por eso;

$$D(X)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq.$$

847. Hallar la esperanza matemática de una variable aleatoria X subordinada a la ley de Poisson $P(X=m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}$.

Resolución. Tenemos

$$M(X)=\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{a^m e^{-a}}{m!}=\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}=ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Pero $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=e^a$, por consiguiente, $M(X)=a$.

848. Hallar la dispersión de una variable aleatoria X subordinada a la ley de Poisson.

Resolución. Primeramente encontramos

$$M(X^2)=\sum_{m=1}^{\infty} m^2\frac{a^m e^{-a}}{m!}=\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!}=$$

$$=a\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}e^{-a}}{(m-1)!}+ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

La primera suma es la esperanza matemática de la variable aleatoria X subordinada a la ley de Poisson y la segunda suma es igual a e^a. De aquí obtenemos $M(X^2)=a^2+a$.

Por lo tanto, $D(X)=a^2+a-a^2=a$.

849. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es igual a 2/3. El tirador ha efectuado 15 disparos. La variable aleatoria X es el número de impactos. Hallar la esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria X.

Resolución. Aquí conviene utilizar los valores de la esperanza matemática y de la varianza para la ley de distribución binomial:

$$M(X)=np=15\cdot 2/3=10,\quad D(X)=npq=15\cdot 2/3\cdot 1/3=10/3.$$

§ 10. Distribución exponencial. Función de fiabilidad

De análogo de la ley de Poisson para variables aleatorias continuas sirve la ley exponencial, cuya función de densidad de distribución es monoparamétrica y tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } a\geqslant 0,\end{cases}$$ donde $\lambda>0$ es un parámetro constante.

La función de distribución (función integral) de la ley exponencial será

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

Por consiguiente,

$$F(x)=\begin{cases}0. & \text{si } x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$$

La probabilidad de que la variable aleatoria χ tome los valores pertenecientes al intervalo $(\alpha,\ \beta)$ será

$$P(\alpha<\chi<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta},$$

o sea,

$$P(\alpha<\chi<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Las características numéricas de la ley exponencial de distribución es fácil obtenerlas partiendo de la definición de las mismas:

$$M[X]=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},\quad D[X]=\int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-(M[X])^2=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\frac{1}{\lambda},$$

o sea,

$$M[X]=\sigma[X]=\frac{1}{\lambda}.$$

En otras palabras, la magnitud inversa del parámetro λ es la esperanza matemática y la desviación típica.

Si por T se designa una variable aleatoria que exprese la duración del funcionamiento irreprochable, por ejemplo, de un elemento cualquiera y por λ, la densidad de fallas (número medio de fallas en la unidad de tiempo), entonces se admite con frecuencia que la duración del buen funcionamiento de este elemento es una variable aleatoria que se distribuye por la ley exponencial con la función de distribución

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t},\quad \lambda>0.$$

La función de distribución determina la probabilidad de fallo de un elemento durante el tiempo t.

Se llama *función de fiabilidad* $R(t)$ a la que determina la probabilidad del buen funcionamiento de un elemento durante un tiempo t: $R(t)=e^{-\lambda t}$.

849a. ¿Para qué valor de k la función $f(x)=ke^{-\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$, $f(x)=0$, si $x<0$, será la función de densidad de la ley exponencial?

Resolución. Es sabido que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$. Entonces

$$\int_0^{\infty} ke^{-\lambda x}dx=1.$$

De ello

$$k\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\Big]_0^{\infty}=1,\quad \frac{k}{\lambda}=1,$$

o sea,

$$k=\lambda.$$

849b. La variable aleatoria X está distribuida según la ley exponencial $f(x)=4e^{-4x}$ para $x\geqslant 0$ y $f(x)=0$ para $x<0$. Hallar la probabilidad de que, como resultado de pruebas, X toma valores pertenecientes al intervalo (0,2; 0,5).

Resolución. Utilizamos la fórmula

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta},$$

$$P(0{,}2<X<0{,}5)=e^{-4\cdot 0{,}2}-e^{-4\cdot 0{,}5}=e^{-0{,}8}-e^{-2}$$

Hallemos los valores de las funciones exponenciales en la tabla VII (pág. 454); $e^{-0,8} = 0,4493$, $e^{-2} = 0,1353$. Por consiguiente,

$$P(0,2 < X < 0,5) = 0,4493 - 0,1353 = 0,314 \approx 31\%.$$

849c. El tiempo de descomposición t de un tren con ayuda de la albardilla es una variable aleatoria subordinada a la ley exponencial. Designemos por $\lambda = 5$ la cantidad media de trenes que la albardilla puede descomponer en 1 hora. Determinar la probabilidad de que el tiempo de descomposición del tren sea: a) menor de 30 min, b) mayor de 6 min y no menos de 24 min.

Resolución. Partiendo de la función de distribución de la ley exponencial $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, obtendremos:

a) la probabilidad de que la descomposición del tren ocupe menos de 30 min = 0,5 h será

$$F(0,5) = P(T < 0,5) = 1 - e^{-5\cdot 0,5} = 1 - e^{-2,5} = 1 - 0,082 =$$
$$= 0,918 \text{ para } \bar{t} = \frac{1}{\lambda} 0,2 \text{ h};$$

b) la probabilidad de que el tiempo de descomposición esté entre 6 y 24 min será

$$P(0,1 < T < 0,4) = e^{-5\cdot 0,1} - e^{-5\cdot 0,4} = e^{-0,5} - e^{-2} =$$
$$= 0,6065 - 0,1353 = 0,4712.$$

849d. La probabilidad de buen funcionamiento de un elemento se distribuye según la ley exponencial $f(t) = 0,02\, e^{-0,02t}$ $(t > 0)$. Hallar la probabilidad de que el elemento funciona sin fallas 50 h.

Resolución. La probabilidad de que el elemento funcione bien durante 50 h se determina por la función de fiabilidad $R(t) = e^{-\lambda t}$, o sea, $R(50) = e^{-0,02\cdot 50} = e^{-1} = 0,3679$.

849e. La variable aleatoria continua X está distribuida por la ley exponencial $f(x) = 2,5\, e^{-2,5x}$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$. Hallar la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica.

849f. La variable aleatoria continua X está distribuida por la ley exponencial con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ 7e^{-7x}, & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Hallar la probabilidad de que, como resultado de las pruebas, X tome los valores pertenecientes al intervalo $(0,15;\ 0,6)$.

849g. Hallar la esperanza matemática de la distribución exponencial definida por la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ 1 - e^{-0,25x}, & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

849h. El tiempo de descomposión t de un tren con ayuda de la albardilla es una variable aleatoria subordinada a la ley exponencial. Designemos por $\lambda = 5$ la cantidad media de trenes que la albardilla puede descomponer durante una hora. Determinar la probabilidad de que el tiempo de descomposición del tren sea mayor de 0,3 h.

849i. La duración del buen funcionamiento de un elemento tiene la distribución exponencial $F(x)=1-e^{-0,02\,t}$, $t>0$. Hallar la probabilidad de que durante el tiempo $t=24$ h:
a) el elemento falle, b) el elemento no falle.

849j. La probabilidad de buen funcionamiento de un televisor está distribuida por la ley exponencial $f(t)=0{,}002\;e^{-0,02\,t}$, $t>0$. Hallar la probabilidad de que el televisor funcione bien durante 1000 horas.

§ 11. Ley de distribución normal. Función de Laplace

La ley de distribución normal se caracteriza por la densidad

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

No es difícil ver que la función $f(x)$ satisface dos condiciones que debe reunir la densidad de distribución: 1) $f(x)>0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

La curva $y=f(x)$ tiene la forma representada en la fig. 41. Ella es simétrica con respecto a la recta $x=m$, la ordenada máxima de la curva (para $x=$

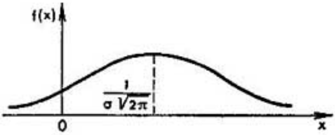

Fig. 41

$=m$) es igual a $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y el eje de abscisas sirve de asíntota de esta curva. Puesto que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=m$, el parámetro m es la esperanza matemática de la variable aleatoria X. Por otro lado, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2\,f(x)\,dx=\sigma^2$, de donde $D(x)=\sigma^2$, o sea, σ es la desviación típica de la variable X.

Introduzcamos la designación

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt.$$

La función $\Phi(x)$ se llama *función de Laplace* o *integral de probabilidades*. Esta función se denomina también *función de errores* y se designa por erf x. A veces se utilizan también otras formas de la función de Laplace, por ejemplo, $\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ (*función normada de Laplace*) que está enlazada con la función de errores $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ por la relación $\overline{\Phi}(x) = 0{,}5\ \Phi(x/\sqrt{2})$, o bien $\overline{\Phi}(x\sqrt{2}) = 0{,}5\ \Phi(x)$.

Para calcular los valores de la función de Laplace se utiliza una tabla especial (véase la tabla II en la pág. 449).

La probabilidad de que una variable aleatoria X subordinada a la ley normal vaya a parar al segmento $]a, b[$ se determina por los valores de la función de Laplace, valiéndose de la fórmula

$$P(a < X < b) = 0{,}5\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Señalemos las propiedades siguientes de la función de Laplace.

1ª. $\Phi(0) = 0$, ya que $\int\limits_0^0 e^{-t^2}dt = 0$;

2ª. $\Phi(+\infty) = 1$, puesto que $\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$;

3ª. $\Phi(x)$ es una función impar.

Es válida también la fórmula

$$P(|X-m| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{2}}\right).$$

Con ayuda de esta fórmula se puede hallar la probabilidad de que una variable aleatoria subordinada a la ley normal vaya a parar a un intervalo simétrico con respecto al punto m.

850. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley normal con esperanza matemática $m = 40$ y varianza $D = 200$. Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo $]30, 80[$.

Resolución. Aquí $a = 30$, $b = 80$, $m = 40$, $\sigma = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; valiéndose de la tabla II en la pág 449, hallamos

$$P(30 < X < 80) = 0{,}5\left[\Phi\left(\frac{80-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{30-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= 0{,}5\,[\Phi(2) + \Phi(0{,}5)] = 0{,}5\,[0{,}995 + 0{,}521] = 0{,}758.$$

851. Se considera que la desviación de la longitud de las piezas fabricadas respecto al estándar es una variable aleatoria distribuida por la ley normal. Si la longitud estándar es igual a $m = 40$ cm y la desviación típica es igual a $\sigma = 0,4$ cm, entonces ¿que precisión de la longitud del artículo se puede garantizar con una probabilidad de 0,8?

Resolución. Se exige hallar un número positivo ε tal que $P(|X-40| < \varepsilon) = 0,8$. Puesto que

$$P(|X-40| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,4\sqrt{2}}\right) = \Phi(1,77\,\varepsilon),$$

el problema se reduce a la solución de la desigualdad $\Phi(1,77\,\varepsilon) > 0,8$. Con ayuda de la tabla II determinamos que $1,77\,\varepsilon > 0,91$. Queda por hallar el valor mínimo de ε que satisfaga esta desigualdad, de donde $\varepsilon = 0,52$.

852. El tiro se ejecuta desde el punto O a lo largo de la recta Ox. El alcance medio de vuelo del proyectil es igual a m. Suponiendo que el alcance de vuelo X está distribuido por la ley normal, con disviación típica $\sigma = 80$ m, hallar qué porcentaje de proyectiles disparados ofrecerá un tiro largo de 120 a 160 m.

853. Una variable aleatoria X está subordinada a la ley normal, con esperanza matemática m y desviación típica σ. Calcular con una precisión de 0,01 las probabilidades de que X tome valores pertenecientes a los intervalos $]m, m+\sigma[$, $]m+\sigma, m+2\sigma[$, $]m+2\sigma, m+3\sigma[$.

854. Mostrar que la probabilidad de que una variable aleatoria X, con la esperanza matemática m y desviación típica σ, subordinada a la ley normal, tome un valor perteneciente al intervalo $]a, b[$ que no cambiará si cada uno de los números a, b, m y σ aumenta λ veces ($\lambda > 0$).

854a. La masa de un vagón es una variable aleatoria distribuida según la ley exponencial con esperanza matemática de 65 t y desviación típica $\sigma = 9$ t. Hallar la probabilidad de que el tren de turno tenga una masa que no exceda de 70 t, pero no sea menos de 60 t.

854b. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley normal con esperanza matemática $a = 6$ y desviación típica $\sigma = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que, como resultado de pruebas, X tome un valor perteneciente al intervalo $[4, 7]$.

854c. El taller fabrica varillas cuya longitud l es una variable aleatoria distribuida según la ley normal con esperanza matemática y desviación típica iguales a 25 y 0,1 cm, respectivamente. Hallar la probabilidad de que la desviación de la longitud de la varilla en uno u otro sentido a partir de la esperanza matemática no rebase los 0,25 cm.

854d. Al pesar un cuerpo se ha obtenido un peso medio $a = 12,3$ N; la desviación típica del peso distribuido según la ley normal $\sigma = 0,03$ N. ¿Qué desviación del peso del cuerpo a partir del peso medio se puede garantizar con una probabilidad de 90%?

854e. El tren se compone de 100 vagones. La masa de cada vagón es una variable aleatoria distribuida según la ley normal con esperanza matemática $a = 65$ t y desviación típica $\sigma = 0,9$ t. La locomotora puede tirar un tren cuya masa sea de 6600 t, como máximo, en otro caso es necesario enganchar una segunda locomotora. Hallar la probabilidad de que no haga falta enganchar la segunda locomotora.

854f. El diámetro de una pieza que se fabrica en un torno es una variable aleatoria distribuida según la ley normal con esperanza matemática $a = 25$ cm y desviación típica $\sigma = 0,4$ cm. Hallar la probabilidad de que dos piezas tomadas al azar tengan una desviación, en valor absoluto, con respecto a la esperanza matemática, que no exceda de 0,16 cm.

Resolución. Es sabido que la probabilidad de que una pieza, tomada al azar, tenga la desviación δ en uno u otro sentido con respecto a la esperanza matemática, es igual a

$$P(a-\delta < X < a+\delta) = P(|X-a| < \delta) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

De aquí

$$P(|X-25| < 0,16) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{0,16}{0,4}\right) = 2\overline{\Phi}(0,4) = 2\cdot 0,1554 = 0,3108.$$

Entonces para dos piezas tomadas al azar la probabilidad buscada será

$$0,3108^2 \approx 0,096.$$

854g. La variable aleatoria X está subordinada a la ley normal con esperanza matemática $a = 1,6$ y desviación típica $\sigma = 1$. Calcular la probabilidad de que en cuatro pruebas la variable aleatoria toma, al menos una vez, un valor perteneciente al intervalo [1, 2].

Resolución. La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor perteneciente al intervalo [1, 2] la calculamos por la fórmula

$$P(1 < X < 2) = \overline{\Phi}\,\frac{2-1,6}{1} - \overline{\Phi}\,\frac{1-1,6}{1} = \overline{\Phi}(0,4) + \overline{\Phi}(0,6) =$$
$$= 0,1554 + 0,2257 = 0,3811.$$

Entonces la probabilidad de que la variable aleatoria no caiga en el intervalo [1, 2] en una prueba, es igual a $1 - 0,3811 = 0,6189$, y en cuatro pruebas será $0,6189^4 = 0,1467$. Por lo tanto, la probabilidad buscada será $1 - 0,1467 = 0,8533$.

854h. El diámetro de una pieza fabricada es una variable aleatoria subordinada a la ley normal con esperanza matemática de 5 cm y desviación típica de 0,9 cm. Hallar: a) la probabilidad de que una pieza tomada al azar tenga un diámetro dentro de los límites de 4 a 7 cm, b) la probabilidad de que el tamaño del diámetro de una pieza tomada al azar se distingue de la esperanza matemática en no más de 2 cm; ¿en qué límites conviene esperar el tamaño del diámetro de la pieza para que la probabilidad de que el tamaño indicado no salga fuera de estos límites sea igual a 0,95.

Resolución. a) $P(4<d<7)=\overline{\Phi}\left(\frac{7-5}{0,9}\right)-\overline{\Phi}\left(\frac{4-5}{0,9}\right)=\overline{\Phi}(2,22)+$ $+\overline{\Phi}(1,11)=0,4867+0,3664=0,8531$; b) $P(|d-5|<2)=2\overline{\Phi}\left(\frac{2}{0,9}\right)=2\overline{\Phi}(2,22)=$ $=0,9734$; c) $P(|d-5|<\delta)=2\overline{\Phi}\left(\frac{\delta}{0,9}\right)=0,95$, $\overline{\Phi}\left(\frac{\delta}{0,9}\right)=0,475$.

Por la tabla de valores de la función normada de Laplace tenemos

$$\frac{\delta}{0,9}=1,96, \quad \delta=1,76.$$

854i. La variable aleatoria X está subordinada a la ley normal con esperanza matemática igual a 2,2 y desviación típica igual a 0,5. ¿Quál es la probabilidad de que en la primera prueba la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo [3, 4] y en la segunda prueba, un valor perteneciente al intervalo [1, 2]?

854j. La variable aleatoria X está subordinada a la ley normal con esperanza matemática igual a 65 y desviación típica igual a 4,1. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera prueba la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo [55, 60] y en la segunda prueba, un valor perteneciente al intervalo [70, 75]?

854k. La variable aleatoria X está distribuida normalmente con esperanza matemática $a = 10$. ¿Cuál debe ser la desviación típica σ de la variable aleatoria para que con una probabilidad igual a 0,8 la desviación, en valor absoluto, a partir de la esperanza matemática no exceda de 0,2.

§ 1. Momentos, asimetría y exceso de una variable aleatoria

Se llama *momento inicial* de s-ésimo orden de una variable aleatoria discreta X definida por la serie de distribución:

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

a la suma de la serie

$$\alpha_s=x_1^s p_1+x_2^s p_2+\ldots+x_n^s p_n+\ldots.$$

Para una variable aleatoria continua X con densidad de distribución $f(x)$ se denomina momento inicial de s-ésimo orden a la integral $\alpha_s=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,dx$.

No es difícil ver que el momento inicial de primer orden de una variable aleatoria X es igual a la esperanza matemática de esta magnitud aleatoria: $\alpha_1=M(X)$.

Se llama *momento central* de s-ésimo orden de una variable aleatoria X a la suma de la serie $\mu_s = (x_1 - m_x)^s \cdot p_1 + (x_2 - m_x)^s \cdot p_2 + \ldots + (x_n - m_x)^s \times \times p_n + \ldots$, donde m_x es la esperanza matemática de la variable aleatoria X.

Para una variable aleatoria continua se llama momento central de s-ésimo orden a la integral $\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x)\,dx$.

Para una variable aleatoria cualquiera el momento central de primer orden es igual a cero, o sea, $\mu_1 = 0$.

El momento central de segundo orden de una variable aleatoria cualquiera es igual a la dispersión de la variable aleatoria, o sea, $\mu_2 = D(X)$.

Los momentos centrales e iniciales de primero, segundo, tercero y cuarto orden están vinculados por las relaciones:

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3, \qquad \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4.$$

Si la distribución es simétrica respecto a la esperanza matemática, entonces todos los momentos centrales de orden impar son iguales a cero, o sea, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = 0$.

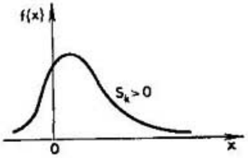

Fig. 42

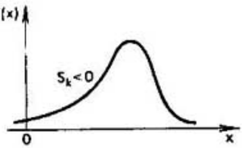

Fig. 43

La relación entre el momento central de tercer orden y el cubo de la desviación típica se llama *asimetría*: $S_k = \mu_3/\sigma_x^3$.

La curva de distribución ha recibido el nombre de *histograma*.

Si la distribución es simétrica con respecto a la esperanza matemática, entonces $S_k = 0$

En las figs. 42 y 43 se muestran los histogramas para $S_k > 0$ y $S_k < 0$.

Se llama *exceso* de una variable aleatoria X a la magnitud E_x determinada por la igualdad $E_x = \mu_4/\sigma_x^4 - 3$. Para la ley de distribución normal $E_x = 0$.

Las curvas de crestas más agudas en comparación con la normal (la llamada *curva de Gauss*) poseen un exceso positivo; para las curvas de crestas más planas $E_x < 0$ (fig. 44).

855. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Hallar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes de esta magnitud aleatoria, determinar también la asimetría y el exceso.

Resolución. El momento inicial de primer orden

$$\alpha_1 = 1\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}2 + 9\cdot 0{,}1 = 4{,}6.$$

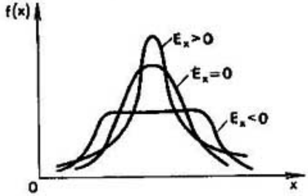

Fig. 44

El momento inicial de primer orden es la esperanza matemática, por eso $M(X) = 4{,}6$.

Hallamos el momento inicial de segundo orden:

$$\alpha_2 = 1\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}4 + 25\cdot 0{,}2 + 49\cdot 0{,}2 + 81\cdot 0{,}1 = 26{,}6.$$

El momento inicial de tercer orden es

$$\alpha_3 = 1\cdot 0{,}1 + 27\cdot 0{,}4 + 125\cdot 0{,}2 + 343\cdot 0{,}2 + 729\cdot 0{,}1 = 177{,}4.$$

El momento inicial de cuarto orden

$$\alpha_4 = 1\cdot 0{,}1 + 81\cdot 0{,}4 + 625\cdot 0{,}2 + 2401\cdot 0{,}2 + 6561\cdot 0{,}1 = 1293{,}8.$$

Determinamos ahora los momentos centrales. Es sabido que $\mu_1 = 0$. El momento central de segundo orden se encuentra por la fórmula

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 26{,}6 - 4{,}6^2 = 26{,}6 - 21{,}16 = 5{,}44.$$

Este momento central es la dispersión de la variable aleatoria, o sea, $D(X) = 5{,}44$.

De aquí es fácil determinar la desviación típica:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}44} = 2{,}33.$$

El momento central de tercer orden se hallará por la fórmula

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 177{,}4 - 3\cdot 4{,}6\cdot 26{,}6 + 2\cdot 4{,}6^3 =$$
$$= 177{,}4 - 367{,}08 + 194{,}672 = 4{,}992.$$

Ahora no es difícil determinar la asimetría:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\delta_x^3} = \frac{4{,}992}{5{,}44\cdot 2{,}33} = \frac{4{,}992}{12{,}675} = 0{,}394.$$

Para el momento central de cuarto orden utilizamos la fórmula

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = 1293{,}8 - 4\cdot 4{,}6\cdot 177{,}4 + 6\cdot 4{,}6^2\cdot 26{,}6 -$$
$$- 3\cdot 4{,}6^4 = 1293{,}8 - 3264{,}16 + 3377{,}136 - 1343{,}227 = 64{,}55.$$

Ahora se puede encontrar el exceso:

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=\frac{64,55}{5,44^2}-3=\frac{64,55}{29,59}-3=2,18-3=-0,82.$$

856. Se da la función

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<0; \\ ax^2, & \text{si} \quad 0\leqslant x<1; \\ a(2-x)^2, & \text{si} \quad 1\leqslant x<2; \\ 0, & \text{si} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$$

(fig. 45). ¿Para qué valor de a la función $f(x)$ es la densidad de distri-

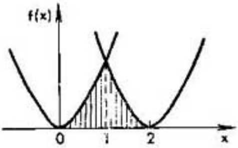

Fig. 45

bución de la variable aleatoria X? Determinar los momentos iniciales y centrales de primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso.

Resolución. Para hallar a tenemos la ecuación

$$a\int_0^1 x^2dx+a\int_1^2 (2-x)^2\,dx=1,$$

de donde

$$a\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-a\cdot\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_0^2=1; \qquad \frac{a}{3}+\frac{a}{3}=1, \qquad \text{o sea,} \qquad a=\frac{3}{2}.$$

Hallamos los momentos iniciales:

$$\alpha_1=\frac{3}{2}\int_0^1 x^3dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x(2-x)^2\,dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(6-\frac{28}{3}+\frac{15}{4}\right)=1;$$

$$\alpha_2=\frac{3}{2}\int_0^1 x^4dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x^2(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{2}\left[\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{3}{10}+14-\frac{45}{2}+\frac{93}{10}=1,1;$$

$$\alpha_3=\frac{3}{2}\int_0^1 x^5dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x^3(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{12}+\frac{3}{2}\left[x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{x^6}{6}\right]_1^2=\frac{1}{4}+\frac{45}{2}-\frac{186}{5}+\frac{63}{4}=1,3;$$

$$\alpha_4=\frac{3}{2}\int_0^1 x^6dx+\frac{3}{2}\int_0^2 x^4(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{14}+\frac{3}{2}\left[\frac{4x^5}{5}-\frac{2x^6}{3}+\frac{x^7}{7}\right]_1^2=\frac{3}{14}+\frac{186}{5}-63+\frac{381}{14}=1\,\frac{22}{35}.$$

Hallamos los momentos centrales:

$$\mu_1=0;$$
$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2=1{,}1-1=0{,}1;$$
$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=1{,}3-3\cdot 1{,}1+2=0$$

(en efecto, la curva tiene un eje de simetría vertical);

$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4=1\,\frac{22}{35}-4\cdot 1{,}3+6\cdot 1{,}1-3=\frac{1}{35}.$$

De aquí obtenemos:

$$D(X)=\mu_2=0{,}1 \text{ (varianza)};$$
$$\delta_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}1}=0{,}316 \text{ (desviación típica)}.$$

Encontramos la asimetría: $S_k=\mu_3/\sigma_x^3=0$.

Hallamos el exceso: $E_x=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=\frac{1/35}{0{,}01}-3=-\frac{1}{7}$.

857. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria:

x_i	2	4	6	8
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Hallar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes de esta variable aleatoria, determinar también la asimetría y el exceso.

858. La densidad de distribución de la variable aleatoria X está definida del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<0;\\ x, & \text{si } 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & \text{si } 1\leqslant x<2;\\ 0, & \text{si } x\geqslant 2.\end{cases}$$

Hallar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso.

859. Una variable aleatoria X está subordinada a la ley con densidad de distribución $f(x)=\lambda e^{-x}$. Determinar el valor de λ y el exceso de la variable aleatoria X.

§ 13. Ley de los grandes números

1. Teorema de Chébishev. Se dice que una variable aleatoria X converge en probabilidad hacia a si para un n suficientemente grande se cumple la desigualdad

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

donde ε es un número positivo pequeño arbitrario y el valor de δ depende de la elección de ε y n. Ateniéndose a los términos usados en la definición dada, el teorema de Chébishev puede ser enunciado del modo siguiente: para un número suficientemente grande de pruebas independientes la media aritmética de valores observados de una variable aleatoria converge en probabilidad hacia su esperanza matemática, o sea,

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

En esta desigualdad se puede tomar $0 < \delta < \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}$, donde $D(X)$ es la varianza de la variable aleatoria X.

El teorema de Chébishev es una de aquellas leyes de los grandes números que sirven de base para todas las aplicaciones prácticas de la teoría de las probabilidades.

2. Teorema de Bernoulli. El teorema de Ja. Bernoulli es otra ley, más simple, de los grandes números (que ha sido descubierta antes que las demás).

El *teorema de Bernoulli* enuncia que *para un aumento ilimitado del número de pruebas la frecuencia de un suceso aleatorio converge en probabilidad hacia la probabilidad del evento*, o sea,

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

$\left(\text{además se puede tomar que } 0 < \delta < \frac{pq}{n\varepsilon^2}\right)$, si la probabilidad del evento no cambia de una prueba a otra y es igual a p $(q = 1 - p)$.

860. Una moneda se arroja 1000 veces. Evaluar superiormente la probabilidad de que la frecuencia de aparición de la cara se desvíe de la probabilidad de su aparición menos que en 0,1.

Resolución. Aquí $n = 1000$, $p = q = 1/2$, $\varepsilon = 0{,}1$. Utilizando la desigualdad (1), obtenemos

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1\right) > 1 - \frac{1/2 \cdot 1/2}{1000 \cdot 0{,}01} = \frac{39}{40}.$$

Como la desigualdad $\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1$ es equivalente a la desigualdad doble $4000 < m < 600$, se puede decir que la probabilidad de que el número de salidas de la cara se encuentre en el intervalo $]400, 600[$ es más de 39/40.

861. En una urna hay 1000 bolillas blancas y 2000 negras. Se han sacado (con reposición) 3000 bolillas. Estimar superiormente la probabilidad de que el número m de bolillas blancas extraídas satisfaga la desigualdad doble $80 < m < 120$.

Resolución. La desigualdad doble dada se puede escribir en la forma

$$-20 < m - 100 < 20, \text{ o bien} -\frac{1}{15} < \frac{m}{300} - \frac{1}{3} < \frac{1}{15}.$$

De suerte que se requiere evaluar la probabilidad de la desigualdad $\left|\frac{m}{300} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}$; por consiguiente, $\varepsilon = \frac{1}{15}$ y

$$P\left(\left|\frac{m}{300} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}\right) > 1 - \frac{1/3 \cdot 2/3}{300 \cdot 1/225} = \frac{5}{6}$$

862. Supongamos que como resultado de 100 pruebas independientes han sido determinados los valores de la variable aleatoria X: $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Sea la esperanza matemática $M(X) = 10$ y la varianza $D(X) = 1$. Estimar superiormente la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media aritmética de los valores observados de la variable aleatoria $\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)/100$ y la esperanza matemática sea menor que 1/2.

Resolución. Valgámonos de la desigualdad

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}.$$

Haciendo $n = 100$, $M(X) = 10$, $D(X) = 1$, $\varepsilon = 1/2$, obtenemos

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/ 100 - 10\right| < \frac{1}{2}\right) > 1 - \frac{1}{100 \cdot (1/4)} = \frac{24}{25}.$$

Por lo tanto, la probabilidad buscada es mayor que 0,96.

863. En cada una de dos urnas hay 10 bolillas, numeradas del 1 al 10. La prueba consiste en sacar de cada urna una bolilla con reposición. La variable aleatoria X es la suma de los números que llevan las bolillas extraídas de dos urnas. Han sido realizadas 100 pruebas. Evaluar superiormente la probabilidad de que la suma $\sum_{i=1}^{100} x_i$ tome un valor perteneciente al intervalo]800, 1400[.

Resolución. Determinamos la ley de distribución de la variable aleatoria X. Esta magnitud aleatoria (la suma de los números que llevan las bolillas extraídas de dos urnas) puede tomar valores: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; ...; $x_{19} = 20$.

Hallamos la probabilidad de que X tome el valor $x_k = k + 1$. Si $k \leqslant 10$, entonces la suma de los números que llevan las bolillas sacadas puede ser igual a $k + 1$ en los k casos equivalentes siguientes:

la primera bolilla está marcada con el número 1; la segunda, con k;

la primera bolilla está marcada con el número 2; la segunda, con $k - 1$;

. . . .

la primera bolilla está marcada con el número k, la segunda con 1.

Como la probabilidad de cada una de estas combinaciones es igual a $(1/10) \times \times (1/10) = 1/100$, entonces la probabilidad p_k de que en cada par de bolillas se obtenga la suma de los números igual a $k+1$ (si $k \leqslant 10$) es de $k/100$. De suerte que $p_k = k/100$ (si $k \leqslant 10$).

Si $k > 10$, la suma de los números que llevan dos bolillas extraidas puede ser igual a $k+1$ en los casos equiposibles siguientes (cuya cantidad es igual a $20-k$):

la primera bolilla está marcada con el número $k-9$; la segunda, con el 10;

la primera bolilla está marcada con el número $k-8$; la segunda, con el 9;

. . . .

la primera bolilla está marcada con el número 10; la segunda, con el $k-9$.

Puesto que la probabilidad de cada una de estas combinaciones es, como antes, igual a 1/100, entonces para $k > 10$ tenemos $p_k = (20-k)/100$.

Para determinar $M(X)$ y $D(X)$ confeccionamos la tabla:

k	x_k	p_k	$p_k x_k$	$x_k - M(x)$	$[x_k - M(X)]^2$	$p_k [x_k - M(X)]^2$
1	2	0,01	0,02	−9	81	0,81
2	3	0,02	0,06	−8	64	1,28
3	4	0,03	0,12	−7	49	1,47
4	5	0,04	0,20	−6	36	1,44
5	6	0,05	0,30	−5	25	1,25
6	7	0,06	0,42	−4	16	0,96
7	8	0,07	0,56	−3	9	0,63
8	9	0,08	0,72	−2	4	0,32
9	10	0,09	0,90	−1	1	0,09
10	11	0,10	1,10	0	0	0
11	12	0,09	1,08	1	1	0,09
12	13	0,08	1,04	2	4	0,32
13	14	0,07	0,98	3	9	0,63
14	15	0,06	0,90	4	16	0,96
15	16	0,05	0,80	5	25	1,25
16	17	0,04	0,68	6	36	1,44
17	18	0,03	0,54	7	49	1,47
18	19	0,02	0,38	8	64	1,28
19	20	0,01	0,20	9	81	0,81
$\sum$		1,00	11,0	—	—	16,50

De este modo,

$$M(X) \sum_{k=1}^{19} p_k x_k = 11, \quad D(X) = 16{,}5.$$

Es evidente que

$$\left(800 < \sum_{i=1}^{100} x_i < 1400\right) \Leftrightarrow \left(-300 < \sum_{i=1}^{100} x_i - 1100 < 300\right) \Leftrightarrow$$

$$-3 < \left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)/100 - 11 < 3 \Leftrightarrow \left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)/100 - 11\right| < 3.$$

Así, pues, $\varepsilon=3$. Por consiguiente,

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/100-11\right|<3\right)>1-\frac{16,5}{900}\cong 0,982.$$

864. Un dado de seis caras se lanza 10 000 veces. Estimar la probabilidad de que la frecuencia de salida de seis puntos se desvíe de la probabilidad de salida del mismo número de puntos menos que en 0,01.

865. La urna contiene 100 bolillas blancas y 100 negras. Se han sacado con reposición 50 bolillas. Evaluar superiormente la probabilidad de que la cantidad de bolillas blancas entre el número de las sacadas satisfaga la desigualdad doble $15<m<35$.

866. Como resultado de 200 pruebas independientes han sido hallados los valores de la variable aleatoria $x_1, x_2, \ldots, x_{200}$, además $M(X)=D(X)=2$. Estimar superiormente la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media aritmética de valores de la variable aleatoria $\left(\sum_{i=1}^{200} x_i\right)/200$ y la esperanza matemática sea menor que 1/5.

§ 14. Teorema de Moivre-Laplace

Si se realizan n pruebas, en cada una de las cuales la probabilidad de que se produzca el evento A es igual a p, entonces la frecuencia m/n de producciones del evento es una variable aleatoria distribuida por la ley binomial; la esperanza matemática y la varianza de esta variable son iguales a p y $\sqrt{pq/n}$, respectivamente. La variable aleatoria $\tau_n=\frac{m/n-p}{\sqrt{pq/n}}$ con esperanza matemática igual a cero y varianza unitaria, ha recibido el nombre de frecuencia *normada* del suceso aleatorio (su distribución es también binomial).

El teorema de Moivre-Laplace enuncia que para un crecimiento ilimitado del número de n pruebas la ley binomial de distribución de la frecuencia normada se convierte, pasando al límite, en distribución normal con la misma esperanza matemática (iqual a 0) y la misma varianza (igual a 1). En virtud de esto, cuando hay grandes valores de n, para las probabilidades de las desigualdades a las cuales debe satisfacer la frecuencia (o el número de salidas) del evento, se puede utilizar una estimación aproximada con ayuda de la integral de probabilidades (función de Laplace), es decir son válidas las fórmulas aproximadas siguientes:

$$P\left(a<\frac{m/n-p}{\sqrt{pq/n}}<b\right)=P\left(a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b\right)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

867. ¿Cuál es la probabilidad de que durante n pruebas el evento A se produzca de α a β veces? La probabilidad de producirse el evento A es igual a p.

Resolución. Es evidente que

$$\left(a<\frac{x-np}{\sqrt{npq}}<b\right) \Leftrightarrow (np+a\sqrt{npq}<x<np+b\sqrt{npq}).$$

Tomamos $np+a\sqrt{npq}=\alpha$, $np+b\sqrt{npq}=\beta$. De aquí, $a=(\alpha-pn)/\sqrt{npq}$, $b=(\beta-np)/\sqrt{npq}$. Aplicando el teorema de Moivre-Laplace, obtenemos

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{2npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{2npq}}\right)\right].$$

868. La probabilidad del evento A para cada prueba es igual a 0,7. ¿Cuántas veces es suficiente repetir la prueba para que con una probabilidad de 0,9 se pueda esperar que la frecuencia de producción del evento A se desviará de la probabilidad no más que en 0,05?

Resolución. De la condición dada resulta que $\left|\frac{X}{n}-0{,}7\right|<0{,}05$. Por lo tanto, $0{,}65\,n<X<0{,}75\,n$. En la fórmula obtenida durante la resolución del problema 867 pongamos $\alpha=0{,}65\,n$, $\beta=0{,}75\,n$. Entonces

$$P(0{,}65\,n<X<0{,}75\,n)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{0{,}75\,n-0{,}7\,n}{\sqrt{2n\,(1/2)\cdot(1/2)}}\right)-\Phi\left(\frac{0{,}65\,n-0{,}7\,n}{\sqrt{2n\,(1/2)\cdot(1/2)}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\sqrt{2n}}{20}\right).$$

De la ecuación $\Phi(\sqrt{2n}/20)=0{,}9$, utilizando la tabla II en la pág. 449, hallamos $\sqrt{2n}/20=1{,}17$, o sea, $n=273$.

869. ¿Cuál es la probabilidad de que efectuados 100 lanzamientos de la moneda la cara salga de 40 a 60 veces?

Indicación: aprovechar el resultado de resolución del problema 867 para $\alpha=40$, $\beta=60$, $n=100$, $p=q=1/2$.

870. En la urna hay 80 bolillas blancas y 20 negras. ¿Cuántas bolillas es necesario sacar (con devolución) de la urna para que con una probabilidad de 0,95 se pueda esperar que la frecuencia de salida de una bolilla blanca se desviará de la probabilidad menos que en 0,1?

§ 15. Sistemas de variables aleatorias

Con frecuencia el resultado de una prueba no se describe por una sola variable aleatoria X sino por varias magnitudes: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En este caso se suele decir que las variables aleatorias indicadas forman el sistema $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

El sistema constituido por dos variables aleatorias (X, Y) se puede representar por un punto aleatorio sobre el plano.

El evento consistente en que el punto aleatorio $(X; Y)$ toma un valor perteneciente al campo D suele designarse en la forma $(X; Y)\subset D$.

La ley de distribución de un sistema de dos variables aleatorias discretas puede estar definida con ayuda de la tabla

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

donde $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} es la probabilidad del evento consistente en el cumplimiento simultáneo de las desigualdades $X = x_i$, $Y = y_j$. Con ello $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. La tabla puede contener un conjunto infinito de filas y columnas.

La ley de distribución de un sistema de variables aleatorias continuas (X, Y) vamos a definirla con ayuda de la función de densidad de probabilidad $f(x, y)$.

La probabilidad de que un punto aleatorio $(X; Y)$ se encuentre en el campo D se determina por la igualdad

$$P[(X;\ Y) \subset D] = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

La función de densidad de probabilidad posee las propiedades siguientes:

1ª. $f(x, y) \geqslant 0$.

2ª. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

Si todos los puntos aleatorios $(X; Y)$ pertenecen a un campo finito D, entonces la última condición toma la forma

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias discretas X e Y que forman parte del sistema se determinan por las fórmulas

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \quad m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}$$

y las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias continuas, por las fórmulas

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,\ y)\,dx\,dy,\quad m_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x,y)\,dx\,dy.$$

El punto $(m_x;\ m_y)$ se llama *centro de dispersión* del sistema de variables aleatorias $(X,\ Y)$.

Las esperanzas matemáticas m_x y m_y se pueden determinar también más simplemente si las variables aleatorias X e Y son independientes. En este caso, partiendo de las leyes de distribución de estas variables aleatorias se puede hallar las esperanzas matemáticas m_x y m_y con ayuda de la fórmula citada en el § 6 de este capítulo.

Las varianzas de las variables aleatorias discretas X e Y se determinan por las fórmulas

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)^2,\quad D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_j - m_y)^2.$$

Las varianzas de las variables aleatorias continuas X e Y que forman parte del sistema se hallan con ayuda de las fórmulas

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2\cdot f(x,\ y)\,dx\,dy,\quad D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 \times$$

$$\times f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Las desviaciones típicas de variables aleatorias X e Y se determinan por las fórmulas

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)},\quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Para calcular las varianzas pueden aplicarse las fórmulas

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,\quad D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2.$$

Un papel importante en la teoría de sistemas de variables aleatorias pertenece al llamado *momento de correlación* (*covarianza*)

$$C_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Para variables aleatorias discretas el momento de correlación se encuentra por la fórmula

$$C_{xy} = \sum_m \sum_n (x_n - m_x)(y_m - m_y)\,p_{nm},$$

y para variables aleatorias continuas, por la fórmula

$$C_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y)\,f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

El momento de correlación se puede hallar también por la fórmula

$$C_{xy} = M(XY) - M(X)\,M(Y).$$

Aquí

$$M(XY) = \sum_m \sum_n x_n y_m p_{mn}$$

para variables aleatorias discretas X e Y y

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)\,dx\,dy$$

para variables continuas.

Las variables aleatorias X e Y se llaman *independientes* si la probabilidad de tomar una de ellas un valor perteneciente a un intervalo cualquiera del campo de sus valores no depende del hecho de qué valor haya tomado la segunda variable. En este caso

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y); \quad C_{xy} = 0.$$

Para caracterizar el enlace existente entre las variables X e Y se examina el llamado *coeficiente de correlación*

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

que es una magnitud adimensional.

Si las variables aleatorias X e Y son independientes, entonces $r_{xy} = 0$. Sin embargo, si las variables aleatorias X e Y están enlazadas por una dependencia lineal exacta $Y = aX + b$, entonces $r_{xy} = \text{sign. a}$, o sea, $r_{xy} = 1$ cuando $a > 0$, y $r_{xy} = -1$ cuando $a < 0$.

En general, el coeficiente de correlación satisface la condición $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$.

871. Dos cajas contienen seis bolillas cada una. En la primera cajita hay: 1 bolilla con No 1, dos con No 2, 3 con No 3 y en la segunda cajita hay: 2 bolillas con No 1, 3 con No 2 y 1 con No 3. Supongamos que X es el número que lleva la bolilla sacada de la primera cajita, Y es el número que lleva la extraida de la segunda cajita. De cada cajita ha sido sacada una bolilla. Confeccionar la tabla de la ley de distribución de las variables aleatorias (X, Y).

Resolución.

El	punto	aleatorio	(1; 1) tiene	la	multiplicidad		$1 \times 2 = 2$;
»	»	»	(1; 2)	»	»	»	$1 \times 3 = 3$;
»	»	»	(1; 3)	»	»	»	$1 \times 1 = 1$;
»	»	»	(2; 1)	»	»	»	$2 \times 2 = 4$;
»	»	»	(2; 2)	»	»	»	$2 \times 3 = 6$;
»	»	»	(2; 3)	»	»	»	$2 \times 1 = 2$;
»	»	»	(3; 1)	»	»	»	$3 \times 2 = 6$;
»	»	»	(3; 2)	»	»	»	$3 \times 3 = 9$;
»	»	»	(3; 3)	»	»	»	$3 \times 1 = 3$.

En total hay $6 \times 6 = 36$ puntos aleatorios (el punto de multiplicidad n tomamos por n puntos).

Puesto que la relación entre la multiplicidad de un punto y toda la cantidad de puntos es igual a la probabilidad de aparición de este punto, la tabla de la ley de distribución del sistema de las variables aleatorias tiene la forma

$X \setminus Y$	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

La suma de todas las probabilidades indicadas en la tabla es igual a la unidad.

872. Hallar las esperanzas matemáticas de las variabls aleatorias X e Y según los datos del problema precedente.

Resolución. Tenemos

$$m_x = 1\cdot\frac{1}{18} + 2\cdot\frac{1}{9} + 3\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{12} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{1}{18} + 3\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{7};$$

$$m_y = 1\cdot\frac{1}{18} + 2\cdot\frac{1}{12} + 3\cdot\frac{1}{36} + 1\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{18} + 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{12} = \frac{11}{6}.$$

El punto (7/3; 11/6) es el centro de dispersión para el sistema dado (X, Y).

Como las variables aleatorias X e Y son independentes (véanse los datos del problema 871), las esperanzas matemáticas m_x y m_y se pueden calcular más sencillamente, utilizando las series de distribución:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

y_j	1	2	3
p_j	1/3	1/2	1/6

De aquí, encontramos

$$m_x = \sum p_i x_i = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}, \quad m_y = \sum p_j y_j = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}.$$

873. Hallar las dispersiones de las variables aleatorias X e Y según los datos del problema 871.

Resolución. Pasamos del sistema de variables (X, Y) al de variables centradas (normalizadas) $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$, donde $\overset{\circ}{X} = X - m_x = X - 7/3$, $\overset{\circ}{Y} = Y - m_y = Y - 11/6$. Componemos la tabla

$\overset{\circ}{X}$ \ $\overset{\circ}{Y}$	$-5/6$	$1/16$	$7/6$
$-4/3$	$1/18$	$1/12$	$1/36$
$-1/3$	$1/9$	$1/6$	$1/18$
$2/3$	$1/6$	$1/4$	$1/12$

Tenemos

$$D(X) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{9};$$

$$D(Y) = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{36}.$$

De aquí, $\sigma_x = \sqrt{5}/3$, $\sigma_y = \sqrt{17}/6$.

Notemos que $D(X)$ y $D(Y)$ se pueden determinar por las fórmulas $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, $D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2$.

874. Hallar el coeficiente de correlación según los datos del problema 871.

Resolución. Utilicemos la tabla de distribución del sistema $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$ de variables aleatorias centradas.

Determinemos la covarianza:

$$C_{xy}=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{36}+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{18}+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{12}=$$
$$=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{5}{108}+\frac{1}{72}+\frac{7}{216}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{54}+\frac{1}{36}+\frac{7}{108}\right)+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{36}+\frac{1}{24}+\frac{7}{72}\right)=-\frac{4}{3}\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0=0\cdot$$

Como $C_{xy}=0$, también el coeficiente de correlación $r_{xy}=0$.

Este mismo resultado podríamos obtener sin determinar la covariancia C_{xy}. En efecto, suponiendo $Y=1$, obtenemos que el valor de $X=1$ se repite 2 veces; el valor de $X=2$, 4 veces y el valor de $X=3$, 6 veces. Por lo tanto, para $Y=1$ obtenemos la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Si $Y=2$, entonces el valor de $X=1$ se repite 3 veces; el valor de $X=2$, 6 veces y el valor de $X=3$, 9 veces. Por consiguiente, para $Y=2$ se obtiene la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Por último, si $Y=3$, entonces el valor de $X=1$ se repite 1 vez; el valor de $X=2$, 2 veces y el valor de $X=3$, 3 veces. La serie de distribución de la variable aleatoria X para $Y=3$ tiene la forma

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

De suerte que para diferentes valores de Y obtenemos la misma serie de distribución de la variable aleatoria X. Puesto que la serie de distribución de la variable aleatoria X no depende de los valores de la variable aleatoria Y, entonces las magnitudes X e Y son independientes. De ello resulta que el coeficiente de correlación es igual a cero.

875. El sistema de variables aleatorias (X, Y) está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y)=\begin{cases} a(x^2+y^2), & \text{si} \quad x^2+y^2 \leqslant r^2; \\ 0, & \text{si} \quad x^2+y^2 > r^2. \end{cases}$$

Hallar el coeficiente a.

Resolución. Determinamos el coeficiente a de la ecuación

$$a \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=1,$$

donde D es el círculo limitado por la circunferencia $x^2+y^2=r^2$. Pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$a \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3\,d\rho\,d\theta=1, \quad \frac{r^4}{4}\cdot 2\pi a=1, \quad \text{o sea,} \quad a=\frac{2}{\pi r^4}.$$

876. El sistema de variables aleatorias (X, Y) está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y)=\begin{cases} a(x+y) & \text{en el fominio } D; \\ 0 & \text{fuera de este dominio.} \end{cases}$$

El dominio D es el cuadrado limitado por las rectas $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$. Se exige: 1) determinar el coeficiente a; 2) calcular la probabilidad de que el punto aleatorio $(X; Y)$ se encuentre en el cuadrado Q limitado por las rectas $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$; 3) hallar las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 4) Hallar las desviaciones típicas σ_x y σ_y.

Resolución. 1) El coeficiente a se determina de la ecuación

$$a \int_0^3 \int_0^3 (x+y)\,dx\,dy=1,$$

ee donde

$$a \int_0^3 \int_0^3 (x+y)dx\,dy=a \int_0^3 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx=a \int_0^3 \left(3x+\frac{9}{2}\right) dx=$$

$$=a\left[\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right]_0^3=a\left(\frac{27}{2}+\frac{27}{2}\right)=27a, \quad 27a=1, \quad \text{o sea,} \quad a=\frac{1}{27}.$$

$$2) \quad P[(X; Y) \subset Q]=\frac{1}{27}\int_1^2 \int_1^2 (x+y)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{27}\int_1^2 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx=\frac{1}{27}\int_1^2 \left(2x+2-x-\frac{1}{2}\right) dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_1^2 \left(x+\frac{3}{2}\right) dx=\frac{1}{27}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]_1^2=\frac{1}{27}\left(2+3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{9}.$$

3) Hallamos las esperanzas matemáticas m_x y m_y ; tenemos

$$m_x=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{27}\int_0^3\left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\left(3x^2+\frac{9}{2}x\right)dx=\frac{1}{27}\left[x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_0^3=\frac{1}{27}\left(27+\frac{81}{4}\right)=7/4.$$

Por consiguiente, también $m_y=7/4$.

4) Hallamos las desviaciones típicas σ_x y σ_y:

$$\sigma_x^2=\iint_D (x-m_x)^2\cdot f(x,\ y)\,dx\,dy=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\times$$

$$\times(x+y)\,dy\,dx=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(x-\frac{7}{4}+y+\frac{7}{4}\right)dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3 dy\,dx+\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot y\Big|_0^3 dx+\frac{1}{27\cdot 2}\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)^2\Big|_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(x-\frac{7}{4}\right)^4}{4}\Bigg|_0^3+\frac{1}{27\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{361}{16}-\frac{49}{16}\right)\Big|_0^3=\frac{11}{16}.$$

De suerte que $\sigma_x=\sigma_y=\sqrt{11}/4$.

877. El sistema de variables aleatorias $(X,\ Y)$ está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x,\ y)=\begin{cases} a\,\mathrm{sen}\,(x+y) & \text{en el dominio } D;\\ 0 & \text{fuera de este dominio.}\end{cases}$$

El dominio D está definido por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$. Hallar: 1) el coeficiente a; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las desviaciones típicas σ_x y σ_y; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

Resolución. 1) El coeficiente a se determina de la ecuación

$$a\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,(x+y)\,dy\,dx=1.$$

De donde

$$a\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx=-a\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}dx=$$

$$=a\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx=a\,(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=2a.$$

De suerte que $a=1/2$, o sea $f(x,\ y)=(1/2)\operatorname{sen}(x+y)$ en el dominio D.

$$2)\ m_x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\,dx\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x+y)\,dy=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\right]x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}x(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}x-\cos x)\,dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{sen}x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$$

De igual modo $m_y=\pi/4$.

$$3)\ \ \sigma_x^2=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x^2\operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x^2\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x^2(\operatorname{sen}x+\cos x)\times$$

$$\times\,dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{1}{2}x^2(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}x(\operatorname{sen}x-\cos x)\,dx-$$

$$-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}+x(\operatorname{sen}x+\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}+(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Por consiguiente, $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_x\sigma_y=(\pi^2+8\pi-32)/16$.

4) Determinamos la covarianza:

$$C_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\,dx\int_0^{\pi/2} y\operatorname{sen}(x+y)\,dy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[y\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\,dy\right]x\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}x\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2} x\left(-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}x-\cos x+\operatorname{sen}x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}x+\cos x-\operatorname{sen}x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}x\left(\operatorname{sen}x-\frac{\pi}{2}\cos x+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\operatorname{sen}x-\frac{\pi}{2}\cos x+\cos x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}x-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{16}.$$

De donde

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx-\frac{0,73688}{3,00232}\sim-0,2454.$$

878. Se da la tabla que determina la ley de distribución del sistema de dos variables aleatorias (X, Y):

X \ Y	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Hallar: 1) el coeficiente λ; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las varianzas σ_x^2 y σ_y^2; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

879. El sistema de variables aleatorias (X, Y) está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y)=\begin{cases} axy & \text{en el dominio } D; \\ 0 & \text{fuera de este dominio.} \end{cases}$$

El dominio D es el triángulo limitado por las rectas $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Hallar: 1) el coeficiente a; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las varianzas σ_x^2 y σ_y^2; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

880. El sistema de variables aleatorias está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y)=\begin{cases} a^2-x^2-y^2, & \text{si} \quad x^2+y^2\leqslant a^2\,(a>0); \\ 0, & \text{si} \quad x^2+y^2>a^2. \end{cases}$$

Hallar: 1) el coeficiente a; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las varianzas σ_x^2 y σ_y^2; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

[illegible] Correlación

Se da un sistema de variables aleatorias (X,Y). Supongamos que como resultado de n pruebas se han obtenido n puntos $(x_1; y_1)$, (x_2, y_2), . . ., $(x_n; y_n)$ (entre ellos pueden haberlos coincidentes). Se exige calcular el coeficiente de correlación de este sistema de variables aleatorias.

Tomando en consideración la ley de los grandes números, cuando n es suficientemente grande, en las fórmulas para determinar σ_x^2, σ_y^2 y C_{xy} se pueden reemplazar las esperanzas matemáticas $M(X)$y y $M(Y)$ por los valores medios aritméticos de las variables aleatorias correspondientes. Con ello tienen lugar las igualdades aproximadas siguientes:

$$M(X) \approx \bar{x}=\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)/n; \quad M(Y) \approx \bar{y}=\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)/n,$$

$$\sigma_x^2 \approx \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)/n-\bar{x}^2; \quad \sigma_y^2 \approx \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)/n-\bar{y}^2,$$

$$C_{xy} \approx \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)/n-\bar{x}\bar{y}.$$

De aquí se puede hallar el coeficiente de correlación con ayuda de la fórmula

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Si $|r_{xy}|\sqrt{n-1} \geqslant 3$, entonces el enlace (vinculación) entre las variables aleatorias X e Y es bastante probable. Si el enlace entre X e Y está determinado, entonces la aproximación lineal $\bar{y}_x$ de x se da por la fórmula de *la regresión lineal*

$$\bar{y}_x-\bar{y}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}), \quad \text{o bien} \quad \bar{y}_x=ax+b.$$

La aproximación lineal $\overline{x}_y$ de y se de por la fórmula de la regresión lineal

$$\overline{x}_y-\overline{x}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y}),\quad \text{o bien}\quad \overline{x}_y=cy+d.$$

Hay que tener en cuenta que $\overline{y}_x=ax+b$ y $\overline{x}_y=cy+d$ son rectas diferentes (fig. 46). La primera recta se obtiene como resultado de la solución del problema sobre la minimización de la suma de cuadrados de las desviaciones

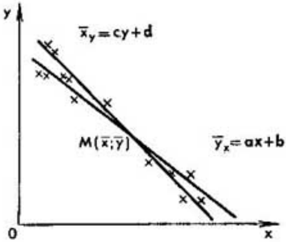

Fig. 46

por la vertical y la segunda, al resolver el problema sobre la minimización de la suma de cuadrados de las desviaciones por la horizontal.

Para construir las ecuaciones de la regresión lineal es necesario:

1) con ayuda de la tabla inicial de valores (X, Y) calcular $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x, σ_y, C_{xy}, r_{xy};

2) Comprobar la hipótesis acerca de la existencia del enlace (vínculo) entre X e Y;

3) escribir las ecuaciones de ambas líneas de regresión y representar los gráficos de estas ecuaciones.

881. Se da la tabla:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0,25	0,37	0,44	0,55	0,60	0,62	0,68	0,70	0,73
Y	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,60	1,51	1,50

i	10	11	12	13	14	15	16	17
X	0,75	0,82	0,84	0,87	0,88	0,90	0,95	1,00
Y	1,41	1,33	1,31	1,25	1,20	1,19	1,15	1,00

Determinar el coeficiente de correlación r_{xy} y las ecuaciones de las líneas de regresión.

Resolución. Componemos la tabla de cálculo:

i	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	0,25	2,57	0,0625	6,6049	0,6425
2	0,37	2,31	0,1369	5,3361	0,8547
3	0,44	2,12	0,1936	4,4944	0,9328
4	0,55	1,92	0,3025	3,6864	1,0560
5	0,60	1,75	0,3600	3,0625	1,0500
6	0,62	1,71	0,3844	2,9241	1,0602
7	0,68	1,60	0,4624	2,5600	1,0880
8	0,70	1,51	0,4900	2,2801	1,0570
9	0,73	1,50	0,5329	2,2500	1,0950
10	0,75	1,41	0,5625	1,9881	1,0575
11	0,82	1,33	0,6724	1,7689	1,0906
12	0,84	1,31	0,7056	1,7161	1,1004
13	0,87	1,25	0,7569	1,5625	1,0875
14	0,88	1,20	0,7744	1,4400	1,0560
15	0,90	1,19	0,8100	1,4161	1,0710
16	0,95	1,15	0,9025	1,3225	1,0925
17	1,00	1,00	1,0000	1,0000	1,0000
$\sum$	11,95	26,83	9,1095	45,4127	17,3917

De la tabla obtenemos: $\sum_{i=1}^{17} x_i = 11,95$, $\sum_{i=1}^{17} y_i = 26,83$, $\sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 9,1095$, $\sum_{i=1}^{17} y_i^2 = 45,4127$, $\sum_{i=1}^{17} x_i y_i = 17,3917$.

Ahora hallamos

$$\overline{x} = 11,95/17 = 0,7029,\ \overline{y} = 26,83/17 = 1,5782;$$
$$\sigma_x^2 = 9,1095/17 - (0,7029)^2 = 0,0418,\ \sigma_x = 0,2042;$$
$$\sigma_y^2 = 45,4127/17 - (1,5782)^2 = 0,1806,\ \sigma_y = 0,4250;$$
$$C_{xy} = 17,3917/17 - 0,7029 \cdot 1,5782 = -0,0863;$$
$$r_{xy} = (-0,0863)/(0,2042 \cdot 0,4250) = -0,09943.$$

Determinamos el valor del producto $|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1}$; puesto que $|r_{xy}| \times \sqrt{n-1} = 0,9943 \cdot 4 = 3,9772 > 3$, la vinculación está suficientemente fundamentada.

Las ecuaciones de las líneas de regresión son:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}),$$

o sea,

$$\bar{y}_x - 1,5782 = -\frac{0,9943 \cdot 0,4250}{0,2042}(x - 0,7029); \quad \bar{y}_x = -2,0695x + 3,0329;$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}),$$

o sea,

$$\bar{x}_y - 0,7029 = -\frac{0,9943 \cdot 0,2042}{0,4250} \cdot (y - 1,5782); \quad \bar{x}_y = -0,4776y + 1,4566.$$

Una vez construidos los puntos determinados por la tabla y las líneas de regresión, vemos que ambas líneas pasan por el punto M (0,7029; 1,5782). La primera línea corta sobre el eje de las ordenadas el segmento 3,0329 y la segunda, sobre el eje de las abscisas, el segmento 1,4566. Los puntos $(x_i; y_i)$ están próximos a las líneas de regresión.

882. Como resultado de 79 pruebas se obtuvo la siguiente tabla de correlación de las variables $X = \sigma_S/\sigma_B$ e Y: Por σ_S se designa el

X \ Y	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	0	2	0	8
0,6	0	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	0	0
0,9	1	0	0	0

límite de fluencia del acero y por σ_B, el límite de rotura del mismo; Y es el porcentaje del carbono contenido en el acero. Los números enteros citados en la tabla son multiplicadades de los valores de puntos aleatorios respectivos. Así, por ejemplo, el punto para el cual $x = 0,8$, $y = 0,6$ tiene la multiplicidad 14, o sea, en 14 pruebas al valor de $x = 0,8$ le ha correspondido el valor de $y = 0,6$.

Se requiere determinar el coeficiente de correlación y las ecuaciones de las líneas de regresión.

Resolución. Encontramos

$$\bar{x}=\frac{0,5\,(2+8)+0,6\,(4+2+9)+0,7\,(2+12+3+1)+0,8\,(21+14)+0,9\,1}{79}=$$

$$=\frac{55,5}{79}=0,703;$$

$$\bar{y}=\frac{0,5\,(2+21+1)+0,6\,(2+4+12+14)+0,7\,(2+3)+0,8\,(8+9+1)}{79}=$$

$$=\frac{49,1}{79}=0,622.$$

Determinemos los valores medios aritméticos de las variables x^2, y^2 y xy:

$$\frac{\sum x^2}{79}=\frac{1}{79}\,[(0,5)^2\cdot(2+8)+(0,6)^2\cdot(4+2+9)+(0,7)^2\cdot(2+12+3+1)+$$

$$+(0,8)^2\cdot(21+14)+(0,9)^2\cdot 1]=\frac{39,93}{79}=0,505;$$

$$\frac{\sum y^2}{79}=\frac{1}{79}\,[(0,5)^2\cdot(0,5)^2\cdot(2+21+1)+(0,6)^2\cdot(2+4+12+14)+(0,7)^2\cdot(2+3)+$$

$$+(0,8)^2\cdot(8+9+1)]=\frac{31,49}{79}=0,398;$$

$$\frac{\sum xy}{79}=\frac{1}{79}\,[0,5\cdot 0,6\cdot 2+0,5\cdot 0,8\cdot 8+0,6\cdot 0,6\cdot 4+0,6\cdot 0,7\cdot 2+0,6\cdot 0,8\cdot 9+$$

$$+0,7\cdot 0,5\cdot 2+0,7\cdot 0,6\cdot 12+0,7\cdot 0,7\cdot 3+0,7\cdot 0,8\cdot 1+0,8\cdot 0,5\cdot 21+$$

$$+0,8\cdot 0,6\cdot 14+0,9\cdot 0,5\cdot 1]=\frac{33,74}{79}=0,427.$$

Determinamos las dispersiones y la covarianza:

$$\sigma_x^2=0,505-(0,703)^2=0,505-0,493=0,012;\qquad \sigma_x=0,11;$$

$$\sigma_y^2=0,398-(0,622)^2=0,398-0,387=0,011;\qquad \sigma_y=0,105;$$

$$C_{xy}=0,427-0,703\cdot 0,622=0,427-0,437=-0,01.$$

Determinamos el coeficiente de correlación:

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=-\frac{0,01}{0,11\cdot 0,105}=-0,867.$$

Calculamos el valor del producto $|r_{xy}|\sqrt{n-1}$; tenemos

$$|r_{xy}|\sqrt{n-1}=0,867\ \sqrt{78}=0,867\cdot 8,84=7,66.$$

Puesto que $|r_{xy}|\cdot\sqrt{n-1}>3$, la vinculación es bastante probable.

Las ecuaciones de las líneas de regresión son:

$$\bar{y}_x-\bar{y}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x}),$$

o sea,

$$\bar{y}_x-0,622=-0,867\cdot\frac{0,105}{0,11}\cdot(x-0,703),\ \bar{y}_x=-0,828x+1,204;$$

$$\bar{x}_y-\bar{x}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot(y-\bar{y}),$$

o sea,

$$\bar{x}_y-0,703=-0,867\cdot\frac{0,11}{0,105}(y-0,622),\ \bar{x}_y=-0,908y+1,268.$$

883. Se da la tabla de correlación para las variables X e Y, donde X es la duración de servicio de una rueda de vagón en años e Y es el valor medio del desgaste referente al espesor de la llanta de la rueda, en milímetros:

X \ Y	0	2	7	12	17	22	27	32	37	42
0	3	6								
1	25	108	44	8	2					
2	3	50	60	21	5	5				
3	1	11	33	32	13	2	3	1		
4		5	5	13	13	7	2			
5			1	2	12	6	3	2	1	
6		1		1			2	1		1
7			1	1				1		

Determinar el coeficiente de correlación y las ecuaciones de las líneas de regresión.

884. Se da la tabla de correlación para las variables X e Y, donde X es la flecha de curvatura del carril, en centímetros, e Y la cantidad de defectos del carril (en centímetros para un riel de 25 m):

X \ Y	0	5	10	15	20
7,0	2				
7,5	1	1		1	1
8,0		1			1
8,5	2				
9,0	2		1	1	3
9,5				2	
10,0	3	2	4	3	3
10,5	4	5	1	3	1
11,0	3		3	2	6
11,5	3	5	1		9
12,0	5	3	6	4	4
12,5	1	1	3	10	6
13,0	1		1	4	5
13,5	1	1		1	6
14,0	2		1		3
14,5			2		1
15,0					
15,5		1	1		
16,0					3

Determinar el coeficiente de correlación y las ecuaciones de las líneas de regresión.

§ 17. Determinación de las características de las variables aleatorias basada en datos experimentales

1. **Poblaciones madre y muestral.** Se llama *población muestral* (*o muestra*) a un conjunto de objetos homogéneos escogidos de un modo aleatorio.

Se denomina *población madre* al conjunto de todos los objetos homogéneos entre los cuales se lleva a cabo el muestreo.

Ha recibido el nombre de *volumen* de una población (muestral o madre) el número de objetos de esta población.

La muestra se dice *representativa* si representa suficientemente bien las relaciones cuantitativas de la población madre.

2. **Frecuencia absoluta y frecuencia relativa.** Supongamos que hay una muestra cuyo volumen es n. Colocamos los resultados del muestreo en la tabla

i	1	2	3	...	n
ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_n

donde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ son los valores de la variable aleatoria X en las pruebas 1, 2, 3, ..., n, respectivamente. Algunos de los valores citados de la variable aleatoria X pueden ser iguales entre sí. Uniendo los valores iguales de la variable aleatoria, obtendremos la tabla

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
n_x	n_1	n_2	n_3	...	n_l

donde n_i es el número de apariciones del valor x_i ($i = 1, 2, \ldots, l$) Las magnitudes $n_1, n_2, \ldots, n_l$ se llaman *frecuencias* (absolutas) de los valores respectivos $x_1, x_2, \ldots, x_l$ de la variable aleatoria X. Es evidente que $\sum\limits_{i=1}^{l} n_i = n$, o sea, la suma de frecuencias de todos los valores de la variable aleatoria es igual al volumen de la muestra.

La relación entre la frecuencia n_i y el volumen de una muestra n se denomina *frecuencia relativa* del valor x_i y se designa por w_i ($i = 1, 2, \ldots, l$). Es evidente que

$$\sum_{i=1}^{l} w_i = \sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

o sea, para la variable aleatoria X la suma de frecuencias relativas de todos los valores de la misma es igual a la unidad.

La tabla que establece la correspondencia entre los valores de una variable aleatoria y las frecuencias relativas de los mismos se llama *distribución estadística* de la variable aleatoria X:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
W	w_1	w_2	w_3	...	w_l

Conviene señalar que muy a menudo se denomina también distribución estadística a la tabla que determina la correspondencia entre los valores de una variable aleatoria y las frecuencias absolutas de los mismos.

Si X es una variable aleatoria continua, entonces es conveniente representar su distribución estadística en la forma

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	$]\xi_2, \xi_3[$	...	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
W	w_1	w_2	w_3	...	w_l

Aquí w_i es la frecuencia relativa con que la variable aleatoria toma un valor perteneciente al intervalo $]\xi_{i-1}, \xi_i[$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Si la variable aleatoria toma λ valores iguales a x_i, entonces, en caso de que λ es par, una mitad de estos valores se puede llevar al intervalo $]\xi_{i-1}, \xi_i[$ y la segunda mitad, al intervalo $]\xi_i, \xi_{i+1}[$, $1 \leqslant i \leqslant 1 - 1$. Cuando λ es impar a uno de estos dos intervalos se le puede llevar $(\lambda + 1)/2$ valores y al segundo, $(\lambda - 1)/2$ valores. Si la muestra tiene un gran volumen n, no tiene importancia esencial a cual de los dos intervalos se le asigna un número mayor de valores.

Para mayor evidencia la distribución estadística de una variable discreta se ilustra mediante el polígono de distribución. Con este fin los puntos sucesivos $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, $\ldots$, $(x_l; w_l)$ se representan sobre el plano de coordenadas y se unen por segmentos rectilíneos. Conviene señalar que los puntos que no son vértices del polígono no tienen interés desde el punto de vista de la estadística matemática.

Para ilustrar la distribución de una variable aleatoria continua se usan diagramas llamados *histogramas* de frecuencias.

1. Histograma que determina las frecuencias en función de los órdenes de los intervalos a los cuales pertenecen los valores de una variable aleatoria.

Supongamos que una variable aleatoria continua X está determinada por la tabla:

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	$]\xi_2, \xi_3[$	...	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
n_x	n_1	n_2	n_3	...	n_l

Suponiendo que las diferencias $\xi_i - \xi_{i-1}$ son constantes, pongamos $\xi_i - \xi_{i-1} = h$ para $i = 1, 2, \ldots, l$ (h es el paso de la tabla). Anotamos sobre el eje Ox los puntos $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l$. Examinamos la función definida por las igualdades $y = n_i/h$ si $x \in]\xi_{i-1}, \xi_i[$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Calculamos las áreas S_i de los rectángulos cuyas bases inferiores son los segmentos $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ del eje Ox y sus bases superiores los segmentos del gráfico de la función $y = n_i/h$ (fig. 47); tenemos

$$S_i = (n_i/h)\cdot h = n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

2. Histograma que caracteriza la distribución estadística de una variable aleatoria. El determina la dependencia existente entre los órdenes y las frecuencias relativas de los valores de la variable aleatoria que se encuentran en estos órdenes.

En este caso se examina la función que tiene la forma $y = w_i/h$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. De un modo análogo al precedente el área del i-ésimo rectángulo respectivo es igual numéricamente a w_i. Ahora bien, el área de la figura limitada por las rectas $x = x_0$, $x = x_l$, $y = 0$, $y = w_i/h$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ es igual a 1 (fig. 48).

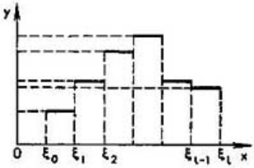

Fig. 47

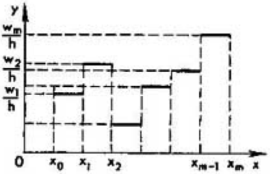

Fig. 48

885. Como resultado de la prueba la variable aleatoria X ha tomado los valores siguientes:

$$\begin{array}{lllll}
\xi_1 = 2, & \xi_2 = 5, & \xi_3 = 7, & \xi_4 = 1, & \xi_5 = 10, \\
\xi_6 = 5, & \xi_7 = 9, & \xi_8 = 6, & \xi_9 = 8, & \xi_{10} = 6, \\
\xi_{11} = 2, & \xi_{12} = 3, & \xi_{13} = 7, & \xi_{14} = 6, & \xi_{15} = 8, \\
\xi_{16} = 3, & \xi_{17} = 8, & \xi_{18} = 10, & \xi_{19} = 6, & \xi_{20} = 7, \\
\xi_{21} = 3, & \xi_{22} = 9, & \xi_{23} = 4, & \xi_{24} = 5, & \xi_{25} = 6.
\end{array}$$

Se requiere: 1) hacer la tabla que determina la dependencia entre los valores de la variable aleatoria y las frecuencias de la misma; 2) construir la distribución estadística: 3) representar el polígono de distribución.

Resolución. 1) Hallamos el volumen de la muestra: $n = 25$. Confeccionamos la tabla

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_x	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

2) La distribución estadística tiene la forma

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	1/25	2/25	3/25	1/25	3/25	5/25	3/25	3/25	2/25	2/25

Control: $\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{2}{25}=1.$
La última tabla puede ser escrita en la forma

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,04	0,08	0,12	0,04	0,12	0,2	0,12	0,12	0,08	0,08

3) Tomamos sobre el plano xOw los puntos (1; 0,04), (2; 0,08), (3, 012), etc. Uniendo sucesivamente estos puntos con segmentos rectilíneos, obtendremos el polígono de distribución de la variable aleatoria X (fig. 49).

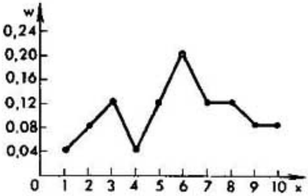

Fig. 49

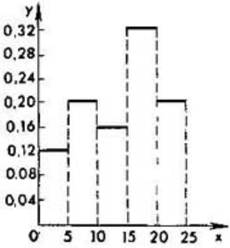

Fig. 50

886. Como resultado de la prueba la variable aleatoria X ha tomado los valores siguientes:

$$\xi_1 = 16, \quad \xi_2 = 17, \quad \xi_3 = 9, \quad \xi_4 = 13, \quad \xi_5 = 21,$$
$$\xi_6 = 11, \quad \xi_7 = 7, \quad \xi_8 = 7, \quad \xi_9 = 19, \quad \xi_{10} = 5,$$
$$\xi_{11} = 17, \quad \xi_{12} = 5, \quad \xi_{13} = 20, \quad \xi_{14} = 18, \quad \xi_{15} = 11,$$
$$\xi_{16} = 4, \quad \xi_{17} = 6, \quad \xi_{18} = 22, \quad \xi_{19} = 21, \quad \xi_{20} = 15,$$
$$\xi_{21} = 15, \quad \xi_{22} = 23, \quad \xi_{23} = 19, \quad \xi_{24} = 25, \quad \xi_{25} = 1.$$

Se requiere: construir la tabla de distribución estadística dividiendo el intervalo]0, 25[en cinco órdenes de longitudes iguales; construir el histograma de frecuencias relativas.

Resolución. Componemos previamente la tabla

I	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[
n_x	3	5	4	8	5

La distribución estadística tiene la forma

I	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[
W	0,12	0,2	0,16	0,32	0,2

El histograma de frecuencias relativas se muestra en la fig. 50.

3. **Función estadística.** Sea $F^*(x)$ la frecuencia relativa de aparición de los valores de una variable aleatoria X que satisfacen la desigualdad $X < x$. La función $F^*(x)$ se llama *función estadística de distribución*. De este modo,

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<x_1; \\ \sum\limits_{j=1}^{h} w_j, & \text{si} \quad x_h \leqslant x < x_{h+1} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1); \\ 1, & \text{si} \quad x \geqslant x_s. \end{cases}$$

Puesto que según le teorema de Bernoulli las frecuencias relativas, al crecer indefinidamente n, tienden en probabilidad hacia las probabilidades respectivas del evento, entonces, al ser grande el volumen de la muestra, la función estadística de distribución $F^*(x)$ es próxima a la función integral de distribución $F(x) = P(X < x)$.

Los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_l$ son puntos de discontinuidad de I género de la función $F^*(x)$.

887. Se da la distribución estádística:

X	11	12	13	14
W_x	0,4	0,1	0,3	0,2

Hallar la función estadística de distribución y construir su gráfico.

Resolución. Tenemos

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{si} \quad x\leqslant 11;\\ 0{,}4, & \text{si} \quad 11<x\leqslant 12;\\ 0{,}5, & \text{si} \quad 12<x\leqslant 13;\\ 0{,}8, & \text{si} \quad 13<x\leqslant 14;\\ 1, & \text{si} \quad x>14.\end{cases}$$

El gráfico de la función $F^*(x)$ se muestra en la fig. 51.

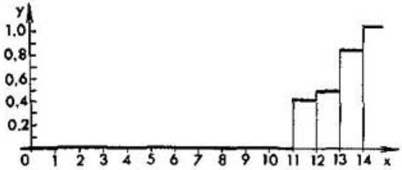

Fig. 51

4. **Determinación del valor medio de una variable aleatoria.** Se llama *valor medio* de una variable aleatoria X, definida por la distribución estadística, a la expresión

$$\bar{x}=w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_lx_l=\sum_{i=1}^{l} w_ix_i,$$

o bien

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_lx_l}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_ix_i. \qquad (1)$$

La igualdad (1) determina el valor medio de X para la muestra.

De un modo análogo se determina el valor medio de una variable aleatoria X para la población madre:

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_Nx_N}{N}, \qquad (2)$$

donde N es el volumen de la población madre. Dado que $n_i/N=p_i$ es la probabilidad con la cual X toma el valor x_i $(1\leqslant i\leqslant N)$, la igualdad (2) se puede escribir en la forma

$$\bar{x}=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_Np_N=M(X).$$

De acuerdo con la ley de los grandes números de Bernoulli se puede considerar que para la población muestral $\bar{x}\simeq M(X)$. En adelante, suponiendo n suficientemente grande, escribiremos $\bar{x}=M(X)$.

Si todos los valores de una variable aleatoria X son próximos a un número constante a, el cálculo de $\bar{x}$ se simplifica:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{l} w_i x_i=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-a+a)=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-a)+a\sum_{i=1}^{l} w_i=\overline{x-a}+a\sum_{i=1}^{l} w_i,$$

o sea,

$$\bar{x}=a+\overline{x-a}, \qquad (3)$$

donde $\overline{x-a}$ es el valor medio de la variable aleatoria $X-a$. Ahora bien, cuando n es suficientemente grande, se cumple la igualdad

$$M(x)=a+M(X-a). \qquad (4)$$

888. Hallar el valor medio de la variable aleatoria definida por la distribución:

X	13,8	13,9	14	14,1	14,2
n_x	4	3	7	6	5

Resolución. Todos los valores de X son próximos a $a=14$. Calculamos las frecuencias relativas y construimos la tabla:

$X-14$	$-0,2$	$-0,1$	0	0,1	0,2
W	0,16	0,12	0,28	0,24	0,2

Ahora encontramos

$$\overline{x-14}=\sum_{i=1}^{5} w_i (x_i-14)=-0,16\cdot 0,2-0,12\cdot 0,1+0,28\cdot 0+$$
$$+0,24\cdot 0,1+0,2\cdot 0,2=-0,032-0,012+0,024+0,04=0,02.$$

Por consiguiente, $\bar{x}=14+0,02=14,02$.

5. Varianza y desviación típica. Se llama *varianza estadística* de una variable aleatoria, definida por una distribución estadística, a la expresión

$$D^*(X)=w_1(x_1-\bar{x})^2+w_2(x_2-\bar{x})^2+\ldots+w_l(x_l-\bar{x})^2. \qquad (1)$$

De la igualdad (1) se desprende que la dispersión estadística es el valor medio de la variable aleatoria $(X-\bar{x})^2$. Al crecer n el valor medio $\bar{x}$ tiende en probabilidad hacia $M(X)$ y las frecuencias $w_1, w_2, \ldots, w_l$, hacia las probabilidades respectivas. Así, pues, cuando el volumen de la muestra es grande, tiene lugar la igualdad aproximada

$$D^*(X)\simeq D(X).$$

La magnitud $\sigma^*(X)=\sqrt{D^*(X)}$ se denomina *desviación típica* (estándar). Tiene la misma dimensión que la variable aleatoria X.

A continuación, estimando el volumen de la muestra n suficientemente grande, en vez de $D^*(X)$ y $\sigma^*(X)$ escribiremos $D(X)$ y $\sigma(X)$, respectivamente.

Si los valores de la variable aleatoria X son próximos a una constante a, entonces el cálculo de la dispersión estadística se simplifica:

$$D^*(X)=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{l} w_i [(x_i-a)-$$

$$-(\bar{x}-a)]^2=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-a)^2-2(\bar{x}-a)\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-a)+$$

$$+(\bar{x}-a)^2\sum_{i=1}^{l} w_i=\sum_{i=1}^{l} w_i (x-a)^2-2(\bar{x}-a)(\overline{x-a})+(\bar{x}-a)^2.$$

De la ecuación (3), del punto 4, se deduce que $\bar{x}-a=\overline{x-a}$, por eso

$$D^*(X)=\overline{(x-a)^2}-(\overline{x-a})^2,$$

donde $\overline{(x-a)^2}$ es el valor medio de la variable aleatoria $(X-a)^2$ y $(\overline{x-a})^2$ es el cuadrado del valor medio de la variable aleatoria $X-a$. Puesto que el primer miembro de la igualdad (2) no depende de a, en el segundo miembro de la igualdad, efectuadas las simplificaciones, a debe eliminarse. En particular, si $a=0$, se obtiene la fórmula

$$D^*(X)=\overline{x^2}-(\bar{x})^2. \qquad (2)$$

Una fórmula análoga se utiliza frecuentemente en le teoría de las probabilidades.

Si las variables aleatorias X e Y están vinculadas por la dependencia lineal $Y=kX+b$, los valores medios de estas variables están enlazados por la misma dependencia lineal:

$$\bar{y}=k\bar{x}+b \text{ o bien } M(Y)=kM(X)+b. \qquad (3)$$

Si la varianza de la variable Y se expresa por la de la variable X, entonces

$$D(Y)=D(kX+b)=D(kX)+D(b)=k^2 D(X),$$

puesto que $D(b)=0$. Por consiguiente,

$$D(Y)=k^2[\overline{x^2}-(\bar{x})^2]. \qquad (4)$$

889. Calcular $D(X)$ y $\sigma(X)$ para la distribución estadística dada en el ejemplo 888.

Resolución. Construimos la tabla

$(X-14)^2$	0,04	0,01	0	0,01	0,04
W	0,16	0,12	0,28	0,24	0,2

Luego tenemos $\bar{x}-14=0{,}02$, $\overline{(x-14)^2}=0{,}0064+0{,}0012+0{,}0024+$ $+0{,}008=0{,}018$.

Por consiguente, $D(X)=0{,}018-0{,}0004=0{,}0176$; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}0176}\approx$ $\approx 0{,}133$.

890. Determinar $\bar{y}$ y $D(Y)$ para la distribución estadística

Y	3	7	11	15	19	23
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

Resolución. Los valores de Y forman una progresión aritmética con el primer término 3 y la diferencia 4. Por eso $Y = 3 + 4(X - 1)$, o sea, $Y = 4X - 1$, $k = 4$, $b = -1$. Si X toma sucesivamente los valores 1, 2, 3, 5, 6, entonces Y tomará los valores 3, 7, 11, 15, 19 y 23, respectivamente. De este modo, se pueden escribir las varianzas de las variables X y X^2:

X	1	2	3	4	5	6
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05
X^2	1	4	9	16	25	36
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

De donde hallamos

$$\bar{x} = 0{,}02 + 0{,}36 + 1{,}05 + 1{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 3{,}43;$$
$$\overline{x^2} = 0{,}02 + 0{,}72 + 3{,}15 + 4{,}8 + 2{,}5 + 1{,}8 = 12{,}99.$$

Utilizando la fórmula (3), obtendremos

$$\bar{y} = 4\ 3{,}43 - 1 - 12{,}72,$$

y por la fórmula (4)

$$D(Y) = 4^2(12{,}99 - 11{,}76) = 16 \cdot 1{,}23 = 19{,}68.$$

891. Hallar el valor medio, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria definida por la distribución:

X	9,8	9,9	10	10,1	10,2
n_x	1	5	8	4	2

892. Determinar $\bar{y}$ y $D(Y)$ para la distribución estadística:

Y	2	5	8	11	14	17	20	23
W	0,10	0,20	0,15	0,25	0,05	0,12	0,08	0,05

6. Determinación de los momentos de una variable aleatoria por los datos del muestreo. Asimetría y exceso. Se llama *momento inicial* de s-ésimo orden de una variable aleatoria X a la magnitud $\alpha_s(X) = M(X^s)$ y se llama *momento central* a la magnitud $\mu_s(X) = M[(X - m_x)^s]$, donde m_x es la esperanza matemática de la variable aleatoria ...

Si la muestra se considera representativa y es de un volumen suficientemente grande, entonces para determinar $\alpha_s(X)$ y $\mu_s(X)$ sirven las fórmulas aproximadas

$$\alpha_s(X) \approx \sum_{i=1}^{l} w_i x_i^s, \quad \mu_s(X) \approx \sum_{i=1}^{l} w_i (x_i - \bar{x})^s.$$

El momento central de primer orden de una variable aleatoria cualquiera es idénticamente igual a cero. En efecto, $\mu_1 = M(X - m_x) = M(X) - m_x = 0$.

En caso de una distribución simétrica de la variable aleatoria X respecto a la esperanza matemática son también iguales a cero los otros momentos centrales de orden impar.

Conviene también tener en cuenta que $\alpha_1(X) = M(X)$ y $\mu_2(X) = D(X)$.

Si los valores de la variable aleatoria son próximos a cierto número a, entonces para calcular los momentos centrales de los primeros cuatro órdenes es conveniente utilizar las fórmulas:

$$\mu_1(X) = 0,$$

$$\mu_2(X) = \overline{(x-a)^2} - \overline{(x-a)}^2,$$

$$\mu_3(X) = \overline{(x-a)^3} - 3\,\overline{(x-a)}\cdot\overline{(x-a)^2} + 2\,\overline{(x-a)}^3,$$

$$\mu_4(X) = \overline{(x-a)^4} - 4\,\overline{(x-a)}\;\overline{(x-a)^3} + 6\,\overline{(x-a)}^2\;\overline{(x-a)^2} - 3\,\overline{(x-a)}^4.$$

Con ayuda de la designación $\nu_s = \overline{(x - a)^s}$ estas fórmulas se transforman obteniendo la forma

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \tag{1}$$

En particular, si $a = 0$, se obtienen las igualdades que determinan las dependencias entre los momentos centrales μ_s e iniciales α_s de los primeros cuatro órdenes:

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,\ \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,\ \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4. \tag{2}$$

Los momentos inicial y central de s-ésimo orden tienen una dimensión igual a la del s-ésimo grado de la variable aleatoria.

Si las variables aleatorias X e Y están vinculadas por la dependencia lineal $Y = kX + b$, entonces el momento central de s-ésimo orden de la variable aleatoria Y se determina del modo siguiente:

$$\mu_s(Y) = \mu_s(kX + b) = k^s\mu_s(X + b) = k^s\mu_s(X). \tag{3}$$

Es fácil demostrar que $\mu_s(X+C) = \mu_s(X)$, donde C es una constante arbitraria.

La desviación típica se determina así:

$$\sigma(Y) = \sqrt{\mu_2(Y)} = \sqrt{k^2\mu_2(X)} = |k|\sqrt{\mu_2(X)} = |k|\sigma(X). \qquad (4)$$

Sea X una variable aleatoria continua. Para determinar sus características numéricas construimos la tabla

X	x_1	x_2	...	x_l
W_x	w_1	w_2	...	w_l

donde x_i es un número cualquiera perteneciente al intervalo $]\xi_{i-1}, \xi_i[$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Generalmente se supone $x_i = (\xi_{i-1} + \xi_i)/2$. Expresando la asimetría y el exceso de la variable aleatoria $Y = kX + b$ por la asimetría y el exceso de la variable aleatoria X cuyas fórmulas se citan en la pág. 226, obtenemos

$$S_k(Y) = \frac{\mu_3(Y)}{\sigma^3(Y)} = \frac{k^3\mu_3(X)}{|k|^3\sigma^3(X)} = \operatorname{sign} k \cdot S_k(X); \qquad (5)$$

$$E_x(Y) = \frac{\mu_4(Y)}{\sigma^4(Y)} - 3 = \frac{k^4\mu_4(X)}{|k|^4\sigma^4(X)} - 3 = E_x(X) \qquad (6)$$

Es evidente que si $k > 0$, entonces $S_k(kX + b) = S_k(X)$; pero si $k < 0$ entonces $S_k(kX + b) = -S_k(X)$.

893. Calcular los momentos centrales de los primeros cuatro órdenes de la variable aleatoria que tiene la distribución estadística siguiente:

X	11	12	13	14
W	0,35	0,25	0,15	0,25

Resolución. Tomemos $a = 10$. Para determinar $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ componemos la tabla de cálculo:

$X-a$	W	$W(X-a)$	$W(X-a)^2$	$W(X-a)^3$	$W(X-a)^4$
1	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
2	0,25	0,50	1,00	2,00	4,00
3	0,15	0,45	1,35	4,05	12,15
4	0,25	1,00	4,00	16,00	64,00
		2,30	6,70	22,40	80,50

De suerte que $\nu_1 = 2,3$; $\nu_2 = 6,7$; $\nu_3 = 22,4$; $\nu_4 = 80,5$. Por las fórmulas (1) hallamos

$$\mu_1(X) = 0; \quad \mu_2(X) = 6,7 - 2,3^2 = 1,41;$$
$$\mu_3(X) = 22,4 - 3\cdot6,7\cdot2,3 + 2\cdot2,3^3 = 0,504;$$
$$\mu_4(X) = 80,5 - 4\cdot22,4\cdot2,3 + 6\cdot6,7\cdot2,3^2 - 3\cdot2,3^4 = 3,1257.$$

894. Calcular los momentos centrales de los primeros cuatro órdenes de la variable aleatoria que tiene la distribución estadística siguiente:

Y	4	9	14	19
W	0,4	0,2	0,3	0,1

Resolución. Los números 4, 9, 14, 19 forman una progresión aritmética, por eso $Y = 4 + 5(X - 1)$, o sea, $Y = 5X - 1$, $k = 5$, $b = -1$. Construimos la tabla

X	W	WX	WX^2	WX^3	WX^4
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
2	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
3	0,3	0,9	2,7	8,1	24,3
4	0,1	0,4	1,6	6,4	25,6
		2,1	5,5	16,5	53,5

Por consiguiente, $\alpha_1 = 2,1$; $\alpha_2 = 5,5$; $\alpha_3 = 16,5$; $\alpha_4 = 53,5$.
Por las fórmulas (2) encontramos:

$$\mu_1(X) = 0; \quad \mu_2(X) = 5,5 - 4,41 = 1,09;$$
$$\mu_3(X) = 16,5 - 6,3\cdot5,5 + 2\cdot2,1^3 = 0,372;$$
$$\mu_4(X) = 53,5 - 8,4\cdot16,5 + 6\cdot4,41\cdot5,5 - 3\cdot4,41^2 = 2,0857.$$

Ahora, utilizando la fórmula (3) obtenemos $\mu_s(Y) = 5^s\mu_s(X)$. O sea,

$$\mu_1(Y) = 0; \quad \mu_2(Y) = 25\cdot1,09 = 27,25;$$
$$\mu_3(Y) = 125\cdot0,372 = 46,5; \quad \mu_4(Y) = 625\cdot2,0857 = 1303,5625.$$

895. Valiéndose de los datos del muestreo, determinar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso si la variable aleatoria X está definida por la tabla.

I	]0, 2[	]2, 4[	]4, 6[	]6, 8[	]8, 10[
n_x	3	4	10	5	3

Resolución. El volumen de la muestra es $n = 25$. Construimos la tabla

X	W_x	W_xX	W_xX^2	W_xX^3	W_xX^4
1	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
3	0,16	0,48	1,44	4,32	12,96
5	0,40	2,00	10,00	50,00	250,00
7	0,20	1,40	9,80	68,60	480,20
9	0,12	1,08	9,72	87,48	787,32
		5,08	31,08	210,52	1530,60

Por consiguiente, $\alpha_1 = 5{,}08$; $\alpha_2 = 31{,}08$; $\alpha_3 = 210{,}52$; $\alpha_4 = 1530{,}60$, o sea, $M(X) = 5{,}08$; $\mu_1 = 0$.

Utilizando las fórmulas (2), encontramos:

$$\mu_2 = 31{,}08 - 25{,}8064 = 5{,}1736, \text{ o sea, } D(X) = 5{,}1736;$$

$$\mu_3 = 210{,}52 - 3\cdot 5{,}08\cdot 31{,}08 + 2\cdot 5{,}08^3 = -0{,}9462;$$

$$\mu_4 = 1530{,}60 - 4\cdot 5{,}08\cdot 210{,}52 + 6\cdot 5{,}08^2\cdot 31{,}08 - 3\cdot 5{,}08^4 = 67{,}3004.$$

De ello obtenemos

$$\sigma(X) = \sqrt{5{,}1736} \approx 2{,}275;$$

$$S_k(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = -\frac{0{,}9462}{2{,}275^3} \simeq -0{,}0804;$$

$$E_x(X) = \frac{\mu^4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{67{,}3004}{2{,}275^4} - 3 \approx -0{,}488.$$

896. Valiéndose de los datos del muestreo, determinar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso para la variable aleatoria definida por la tabla.

I	]1, 3[	]3, 5[	]5, 7[	]7, 9[	]9, 11[
n_x	2	4	10	6	3

§ 18. Determinación de las leyes de distribución de variables aleatorias basándose en datos experimentales

1. Distribución con densidad uniforme. Sea dada la distribución estadística:

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	...	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
W	w_1	w_2	...	w_l

Si los números $w_1, w_2, \ldots, w_l$ son próximos unos a otros, entonces para la elaboración de las observaciones es cómodo valerse de la lay de distribución con densidad uniforme. Como se sabe (véase la pág. 214), en este caso la densidad de distribución se determina del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<a; \\ 1/(b-a), & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & \text{si} \quad x>b. \end{cases}$$

La esperanza matemática, la varianza y la desviación típica para la distribución con densidad uniforme se determinan por las fórmulas

$$M(X)=(a+b)/2, \quad D(X)=(b-a)^2/12, \quad \sigma(X)=(b-a)/(2\sqrt{3}),$$

Así, pues, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+b)/2=M(X), \\ (b-a)/(2\sqrt{3})=\sigma(X), \end{cases}$$

se puede hallar a y b y luego la densidad de distribución buscada.

897. Igualar los datos experimentales, aplicando la ley de distribución con densidad uniforme:

I	]0, 10[	]10, 20[	]20, 30[	]30, 40[	]40, 50[	]50, 60[
n_x	11	14	15	10	14	16

Resolución. Aquí $n=80$. Confeccionamos la tabla

X	5	15	25	35	45	55
W	11/80	14/80	15/80	10/80	14/80	16/80

Suponiendo $X = 5T$, obtendremos la tabla siguiente:

T	W	WT	WT^2
1	11/80	11/80	11/80
3	7/40	21/40	63/40
5	3/16	15/16	75/16
7	1/8	7/8	49/8
9	7/40	63/40	567/40
11	1/5	11/5	121/5
		25/4	509/10

Luego tenemos

$$M(X) = 5M(T) = 5\cdot(25/4) = 31{,}25;$$

$$M(X^2) = 5^2 M(T^2) = 25\cdot(509/10) = 1272{,}5;$$

$$D(X) = 1272{,}5 - 976{,}5625 = 295{,}9375;$$

$$\begin{cases}(a+b)/2 = 31{,}25,\\ (b-a)/(2\sqrt{3}) = \sqrt{295{,}9375}.\end{cases}$$

Resolviendo el último sistema, hallamos $a = 1{,}46$, $b = 61{,}04$ de donde $1/(b-a) = 1/(61{,}04-1{,}46) = 0{,}017$. Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases}0, & \text{si} \quad x < 1{,}46;\\ 0{,}017, & \text{si} \quad 1{,}46 \leqslant x \leqslant 61{,}04;\\ 0 & \text{si} \quad x > 61{,}04.\end{cases}$$

Para construir el histograma componemos la tabla (donde $h = 10$):

I	]0, 10[	]10, 20[	]20, 30[	]30, 40[	]40, 50[	]50, 60[
W/h	0,0138	0,0175	0,0188	0,0125	0,0175	0,02

En la fig. 52 se muestra el histograma de frecuencias relativas de la distribución estadística dada y el gráfico de densidad de distribución.

Puesto que la distribución con densidad uniforme es simétrica con respecto a la esperanza matemática, $\mu_s(X) = 0$ y $S_k(X) = 0$. Se sabe también que para tal distribución el exceso vale $-1{,}2$ independientemente de los valores de a y b.

898. Efectuar la igualación de los datos experimentales con ayuda de la ley de distribución con densidad uniforme:

I	]−1, 1[	]1, 3[	]3, 5[	]5, 7[	]7, 9[
n_x	6	7	4	5	8

2. Distribución de Poisson. La distribución de Poisson determina la correspondencia entre los valores de una variable aleatoria X y las probabilidades de estos valores con ayuda de la igualdad

$$P=\frac{e^{-\lambda}}{x!}\lambda^{x}, \tag{1}$$

donde x toma los valores 0, 1, 2, 3, ...

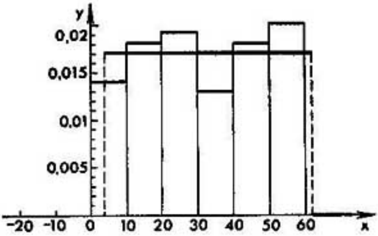

Fig. 52

De este modo, la serie de distribución de una variable aleatoria X tiene la forma

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}\cdot\lambda$	$\frac{e^{-\lambda}}{2!}\cdot\lambda^2$	$\frac{e^{-\lambda}}{3!}\cdot\lambda^3$	...

En la práctica la variable aleatoria X toma un número limitado de valores 0, 1, 2, . . ., l, ya que, al ser suficientemente grande λ, la magnitud $\frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}$ es pequeña.

Recordemos que para la distribución de Poisson $M(X) = D(X) = \lambda$.

Sea dada la distribución estadística:

X	0	1	2	...	l
n_x	n_0	n_1	n_2	...	n_l

Esta distribución puede escribirse también en la forma

X	0	1	2	...	l
W	w_0	w_1	w_2	...	w_l

Si para la distribución dada las magnitudes $M(X)$ y $D(X)$ no son próximas entre sí, entonces ella no es una distribución de Poisson. Pero si $M(X) \approx \approx \lambda$ y $D(x) \approx \lambda$, entonces para resolver la cuestión acerca del carácter de la distribución conviene sustituir el valor de λ en la expresión (1) y calcular los valores de esta expresión para $x = 0, 1, 2, \ldots, l$. En el caso en que los valores de P resultan próximos a los respectivos valores de W, se puede considerar que la variable aleatoria está distribuida por la ley de Poisson.

899. Se da la distribución estadística:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
n_x	7	21	26	21	13	7	3	2

Mostrar que ella es próxima a la distribución de Poisson y determinar la dependencia entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades de estos valores.

Resolución. Hallamos $n = \sum_{i=0}^{7} n_i = 7+21+26+21+13+7+3+2=100.$

Componemos la tabla

X	0	1	2	3	4	5	6	7
W	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

Determinemos la esperanza matemática de la variable aleatoria:

$$M(X) = 0,21 + 0,52 + 0,63 + 0,52 + 0,35 + 0,18 + 0,14 = 2,55.$$

Ahora construimos la tabla

X^2	0	1	4	9	16	25	36	49
W	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

Por consiguiente,

$M(X^2) = 0,21 + 1,04 + 1,89 + 2,08 + 1,75 + 1,08 + 0,98 = 9,03$, de donde $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 9,03-6,503 = 2,527$. Hacemos $\lambda = 2,52$; entonces la dependencia entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades de los mismos se puede escribir en la forma

$$P=\frac{e^{-2,52}}{x!}\cdot 2,52^x.$$

Determinando por esta fórmula los valores de P para $x=0, 1, 2, \ldots, 7$, obtenemos la tabla

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0,08	0,20	0,25	0,21	0,13	0,07	0,03	0,01

900. Resolver el poblema, análogo al precedente, para la distribución estadística.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_x	1	3	8	14	17	17	15	10	7	5	2	1

3. Distribución normal. Sea que la distribución estadística

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	$\ldots$	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
W	w_1	w_2	$\ldots$	w_l

tiene el histograma representado en la fig. 53. Componemos la tabla

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_l
W	w_1	w_2	$\ldots$	w_l

haciendo $x_i=(\xi_{i-1}+\xi_i)/2$, $i=1, 2, \ldots, l$. En la figura están unidos por una línea continua los puntos $(x_1; w_1/h)$, $(x_2, w_2/h)$, $\ldots$, $(x_l, w_l/h)$, donde h es el paso de la tabla.

Si la curva continua obtenida es próxima a la de Gauss, entonces se puede elaborar, los datos estadísticos con ayuda de la ley normal de distribución. Determinadas la esperanza matemática $m=M(X)$ y la desviación típica $\sigma=\sigma(X)$, examinemos la función

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}. \tag{1}$$

Hallamos los valores de esta función en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_l$. No es difícil ver que los productos $hf(x_1)$, $hf(x_2)$, $\ldots$, $hf(x_l)$ son iguales a las probabilidades de que la variable aleatoria distribuida por la ley normal (1) tome los valores pertenecientes a los intervalos $]\xi_0, \xi_1[$, $]\xi_1, \xi_2[$, . . . $[\xi_{l-1}, \xi_l[$. Si la distribución estadística dada es próxima a la normal, se cumplirán las igualdades aproximadas $hf(x_i) \approx w_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Más adelante se expondrán criterios más exactos de concordancia de las leyes de distribución empírica y teórica.

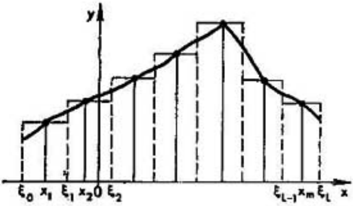

Fig. 53

901. Se da la distribución estadística:

I	]0, 3[	]3, 6[	]6, 9[	]9, 12[	]12, 15[	]15, 18[	]18, 21[	]21, 24[	]24, 27[	]27, 30[
n_x	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Mostrar que ella es próxima a la distribución normal y construir el histograma de sus frecuencias relativas.

Resolución. Aquí $n = 50$, Construimos la tabla

X	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Efectuando la sustitución de la variable por la fórmula $X = 3T - 1{,}5$, escribimos la distribución estadística para T y T^2:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02
T^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Luego tenemos

$$M(T) = 0,02 + 0,12 + 0,24 + 0,48 + 1,1 + 1,2 + 0,98 + 0,8 + 0,36 + 0,2 = 5,5;$$

$$M(T^2) = 0,02 + 0,24 + 0,72 + 1,92 + 5,5 + 7,2 + 6,86 + 6,4 + 3,24 + 2 = 34,1;$$

$$M(X) = 3M(T) - 1,5 = 3\cdot 5,5 - 1,5 = 15;$$

$$\sigma^2(X) = 9(34,1 - 30,25) = 34,65; \quad \sigma(X) = \sqrt{9\cdot 3,85} = 3\cdot 1,962 \simeq 5,9.$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{1}{5,9\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-15)^2/69,3}.$$

Hacemos $(x - 15)/5,9 = u$; entonces

$$f(x) = \frac{1}{5,9\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2} \approx 0,17 z_u, \quad \text{donde} \quad z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2}.$$

Los valores de la función z_u se citan en la tabla III, pág. 450.

Utilizando estos valores, componemos ahora la tabla ($h = 3$):

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$
1,5	−2,29	0,029	0,005	0,02
4,5	−1,78	0,082	0,014	0,04
7,5	−1,27	0,178	0,030	0,09
10,5	−0,76	0,299	0,051	0,15
13,5	−0,25	0,387	0,066	0,20
16,5	0,25	0,387	0,066	0,20
19,5	0,76	0,299	0,051	0,15
22,5	1,27	0,178	0,030	0,09
25,5	1,78	0,082	0,014	0,04
28,5	2,29	0,029	0,005	0,02

Notemos que los resultados obtenidos pueden ser confrontados con las probabilidades de que la variable aleatoria se encuentre en el intervalo dado, que se calculan por la fórmula

$$P(a < X < b) = 0,5\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right],$$

donde $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}dt$ es la función de Laplace cuyos valores se citan en la tabla II, pág. 449, y $m = M(X) = 15$. Valiéndonos de esta tabla, encontramos

$$P(0 < X < 3) = 0,5 - [\Phi(1,44) + \Phi(1,80)] = 0,5(-0,9583 + 0,9891) = 0,0514 \approx 0,02;$$

$$P(3 < X < 6) = 0,5[-\Phi(1,08) + \Phi(1,44)] = 0,5(-0,8733 + 0,9583) = 0,0425 \approx 0,04;$$

$$P(6 < X < 9) = 0,5[-\Phi(0,72) + \Phi(1,08)] = 0,5(-0,6914 + 0,8733) = 0,0905 \approx 0,09;$$

$$P(9 < X < 12) = 0{,}5\,[-\Phi(0{,}36) + \Phi(0{,}72)] = 0{,}5\,(-0{,}3893 + 0{,}6914) = 0{,}151 \approx 0{,}15;$$

$$P(12 < X < 15) = 0{,}5\,[-\Phi(0) + \Phi(0{,}36)] = 0{,}5 \cdot 0{,}3893 = 0{,}1946 \approx \approx 0{,}19;$$

$$P(15 < X < 18) = 0{,}5\,[\Phi(0{,}36) - \Phi(0)] = 0{,}5 \cdot 0{,}3893 = 0{,}1946 \approx 0{,}19;$$

$$P(18 < X < 21) = 0{,}5\,[\Phi(0{,}72) - \Phi(0{,}36)] = 0{,}5\,(0{,}6914 - 0{,}3893) = 0{,}151 \approx 0{,}15;$$

$$P(21 < X < 24) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}08) - \Phi(0{,}72)] = 0{,}5\,(0{,}8733 - 0{,}6914) = 0{,}091 \approx 0{,}09;$$

$$P(24 < X < 27) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}44) - \Phi(1{,}08)] = 0{,}5\,(0{,}9583 - 0{,}8733) = 0{,}0425 \approx 0{,}04;$$

$$P(27 < X < 30) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}80) - \Phi(1{,}44)] = 0{,}5\,(0{,}9891 - 0{,}9583) = 0{,}0154 \approx 0{,}02.$$

Como resultado tenemos la tabla

I	]0, 3[	]3, 6[	]6, 9[	]9, 12]	]12, 15[	]15, 18[	]18, 21[	]21, 24[	]24, 27[	]27, 30[
W	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Comparando los valores de w y de $hf(x)$ (o bien los de w y de P), nos convencemos de que la distribución estadística dada se puede considerar subordinada a la ley normal (fig. 54).

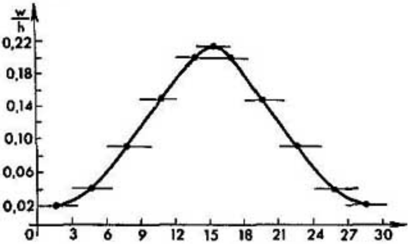

Fig. 54

902. Resolver el problema, análogo al precedente, para la distribución estadística

I	]1, 2[	]2, 3[	]3, 4[	]4, 5[	]5, 6[	]6, 7[	]7, 8[	]8, 9[	]9, 10[	]10, 11[	]11, 12[	]12, 13[	]13, 14[	]14, 15[
n_x	4	4	8	16	18	20	30	28	22	18	14	10	4	4

4. Distribución de Charlier. La distribución normal es simétrica, o sea, la curva $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$ es simétrica con respecto a la recta $x = m$. No obstante, en la práctica se encuentran frecuentemente también las distribuciones asimétricas. En el caso en que la asimetría no es muy grande, en valor absoluto, la distribución puede ser igualada con ayuda de la llamada ley de Charlier. La densidad de la ley de Charlier se determina por la igualdad

$$f_{\mathrm{Ch}}(x) = f(x) + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{S_k(X)}{6} z_u(u^3 - 3u) + \frac{E_x(X)}{24} z_u(u^4 - 6u^2 + 3)\right], \qquad (1)$$

donde $f(x)$ es la densidad de la ley normal de distribución, $u = (x - m)/\sigma$, $z_u = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-u^2/2}$, $S_k(X)$ es la asimetría, $E_x(X)$ es el exceso. Ahora bien, el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (1) es la corrección a la ley normal de distribución. No es difícil ver que si $S_k(X) = 0$ y $E_x(X) = 0$, la distribución de Charlier coincide con la normal. La distribución de Charlier se puede escribir en la forma

$$P = \frac{h}{\sigma} \cdot z_u \left[1 + \frac{S_k(X)}{6}(u^3 - 3u) + \frac{E_x(X)}{24}(u^4 - 6u^2 + 3)\right]. \qquad (2)$$

903. Valerse de la distribución de Charlier para los datos de la tabla estadística

I	]0, 3[	]3, 6[	]6, 9[	]9, 12[	]12, 15[	]15, 18[	]18, 21[	]21, 24[	]24, 27[	]27, 30[
n_x	1	5	8	15	28	21	10	6	3	3

Resolución. Aquí $n = 100$. Construimos la tabla

X	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
W_x	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

Pasamos a una variable nueva T vinculada con X por la dependencia $X = 3T - 1,5$. La distribución estadística de la variable aleatoria T tiene la forma

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

Elaboramos la tabla de cálculo:

T	W	WT	WT^2	WT^3	WT^4
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2	0,05	0,10	0,20	0,40	0,80
3	0,08	0,24	0,72	2,16	6,48
4	0,15	0,60	2,40	9,60	38,40
5	0,28	1,40	7,00	35,00	175,00
6	0,21	1,26	7,56	45,36	272,16
7	0,1	0,70	4,90	34,30	240,10
8	0,06	0,48	3,84	30,72	245,76
9	0,03	0,27	2,43	21,97	197,73
10	0,03	0,30	3,00	30,00	300,00
		5,36	32,06	209,52	1476,44

Luego tenemos

$M(T) = 5{,}36;\quad M(X) = 3\cdot 5{,}36 - 1{,}5 = 14{,}58;\quad M(T^2) = 32{,}06;$

$D(T) = 32{,}06 - 28{,}73 = 3{,}33;\quad \sigma(T) = \sqrt{3{,}33} = 1{,}83;\quad \sigma(X) = 3\sigma(T) = 5{,}49;$

$$\mu_3(T) = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 209{,}52 - 3\cdot 5{,}36\cdot 32{,}06 + 2\cdot 5{,}36^3 = 1{,}98;$$

$$S_k(T) = \mu_3(T)/\sigma^3(T) = 1{,}98/1{,}83^3 = 0{,}32;$$

$$\mu_4(T) = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = 1476{,}44 - 4\cdot 5{,}36\cdot 209{,}52 + 6\cdot 5{,}36^2\cdot 32{,}06 - 3\cdot 5{,}36^4 = 34{,}59;$$

$$\sigma^4(T) = 3{,}33^2 = 11{,}09;\quad E_x(T) = \mu_4(T)/\sigma^4(T) - 3 = 34{,}59/11{,}09 - 3 = 0{,}12.$$

Puesto que $h = 3$, $M(X) = 14{,}58 = m$, $\sigma(X) = 5{,}49$, $u = (x - 14{,}58)/5{,}49$, $S_k(X) = 0{,}32$, $E_x(X) = 0{,}12$, entonces la frecuencia relativa de la distribución de Chalier se expresa por la igualdad

$$w = \frac{3}{5{,}49} z_u \left[1 + \frac{0{,}32}{6}(u^3 - 3u) + \frac{0{,}12}{24}(u^4 - 6u^2 + 3)\right],$$ o bien $w = 0{,}55\, z_u \cdot S$, donde $S = 1 + 0{,}05(u^3 - 3u) - 0{,}005(u^4 - 6u^2 + 3)$.

Confeccionamos la tabla para determinar las frecuencias igualadas por la ley de Charlier:

X	U	z_u	U^2	U^3	U^4	$3U$	$6U^2$	$0{,}05(U^3-3U)$	$0{,}005(U^4-6U^2+3)$	S	P
1,5	−2,38	0,02	5,66	−13,48	32,08	−7,14	33,96	−0,32	0,005	0,69	0,01
4,5	−1,84	0,07	3,39	−6,23	11,46	−5,52	20,34	−0,04	−0,03	0,9	0,04
7,5	−1,29	0,17	1,66	−2,15	2,77	−3,87	9,96	0,09	−0,02	1,05	0,09
10,5	−0,74	0,30	0,55	−0,41	0,30	−2,22	3,30	0,09	0,00	1,09	0,18
13,5	−0,19	0,39	0,04	−0,01	0,00	−0,57	0,24	0,03	0,015	1,06	0,23
16,5	0,35	0,38	0,12	0,04	0,01	1,05	0,72	−0,05	0,01	0,97	0,20
19,5	0,90	0,27	0,81	0,73	0,66	2,7	4,86	−0,10	−0,005	0,89	0,13
22,5	1,44	0,14	2,07	2,99	4,30	4,32	12,42	−0,07	−0,025	0,88	0,07
25,5	1,99	0,06	3,96	7,88	15,68	5,97	23,76	0,10	−0,025	1,05	0,03
28,5	2,54	0,02	6,45	16,39	41,62	7,62	38,70	0,44	0,03	1,5	0,02

Comparando las frecuencias obtenidas, después de igualarlas por la ley de Charlier, con las frecuencias respectivas dadas por la tabla estadística, llegamos a la conclusión de que son suficientemente próximas las unas a las otras. Sin embargo, la cuestión acerca de la concordancia de las distribuciones estadística y teórica no se puede resolver sino que después de examinar los criterios de aceptación (de Pearson, Romanovski, Kolmogórov).

5. Criterios de aceptación de Pearson y Romanovski. Examinemos la cuestión acerca de la concordancia de las distribuciones estadística y teórica. Supongamos que la distribución estadística está igualada con ayuda de una ley conocida de distribución (con densidad uniforme, ley normal, ley de Charlier, etc.).

Pearson propuso el siguiente criterio de concordancia de las distribuciones estadística y teórica. Primeramente se introduce la variable

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{l} \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i},$$

donde w_i son las frecuencias relativas definidas por la tabla estadística y p_i son las probabilidades obtenidas por cierta ley teórica de distribución. Luego se examina la diferencia $r = l - t$, donde l es el número de órdenes de la tabla estadística y t es el número de condiciones que se imponen sobre las frecuencias $w_1, w_2, \ldots, w_l$; el número r se llama número de *grados de libertad*.

Por ejemplo, para la ley de distribución normal $t = 3$, ya que se utilizan las condiciones siguientes:

$$1)\ \sum_{i=1}^{l} w_i = 1; \quad 2)\ \sum_{i=1}^{l} w_i x_i = m_x; \quad 3)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 w_i = D_x,$$

donde m_x y D_x son la esperanza matemática y la varianza en la ley de distribución teórica.

Para la ley de Charlier $t = 5$, ya que hay cinco ecuaciones lineales que vinculan los valores $p_1, p_2, \ldots, p_l$:

$$1)\ \sum_{i=1}^{l} p_i = 1; \quad 2)\ \sum_{i=1}^{l} p_i x_i = m_x; \quad 3)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 p_i = D_x;$$

$$4)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^3 p_i = \mu_3(x); \quad 5)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^4 p_i = \mu_4(X).$$

Utilizando la tabla IV (véanse las págs. 451 y 452), por los valores χ^2 y r se determina la magnitud P que caracteriza la probabilidad de concordancia de las distribuciones teórica y estadística. Si $P < 0{,}1$, se puede deducir que la teoría reproduce mal el experimento. No obstante, si $P > 0{,}1$, esto quiere decir que la hipótesis acerca de la distribución teórica tomada no contradice los datos experimentales.

V. I. Romanovski propuso el siguiente criterio de aceptación: si la magnitud $|\chi^2 - r| / \sqrt{2r} \geqslant 3$, entonces la divergencia entre las frecuencias teóricas y experimentales no deben considerarse casuales; si $|\chi^2 - p| / \sqrt{2r} < 3$, esta divergencia se puede tomar como aleatoria.

904. Comprobar si concuerda o no la distribución estadística del problema 897 con la teórica que tiene una densidad uniforme.

Resolución. Por los datos de la tabla estadística en el problema 897 ha sido determinada la densidad de distribución

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 1{,}46; \\ 0{,}017, & \text{si} \quad 1{,}46 \leqslant x \leqslant 61{,}04 \\ 0, & \text{si} \quad x > 61{,}04. \end{cases}$$

Hallamos la probabilidad de que la variable aleatoria distribuida por la ley indicada con densidad uniforme tome los valores pertenecientes a los intervalos]—10, 0[,]0, 10[,]10, 20[....,]60, 70[,]70, 80[:

I	]—10,0[	]0,10[	]10, 20[	]20, 30[	]30, 40[	]40, 50[	]50, 60[	]60, 70[	]70, 80[
P	0	0,14	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,01	0

Conviene señalar que $P(0 < X < 10) = P(1{,}46 < X < 10) = (10 - 1{,}46) \times$ $\times\ 0{,}017 = 0{,}14$; $P(60 < X < 70) = P(60 < X < 61{,}04) = 0{,}01$. Componemos la tabla de cálculo para determinar χ^2:

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,14	0,14	0	0	0
0,17	0,17	0	0	0
0,19	0,17	0,02	0,0004	0,0023
0,13	0,17	—0,04	0,0016	0,0094
0,17	0,17	0	0	0
0,2	0,17	0,03	0,0009	0,0052
0	0,01	—0,01	0,0001	0,01

Por consiguiente, $\chi^2 = 80 \cdot 0{,}0269 = 2{,}152$; $l = 7$, $t = 3$, $r = 4$. Cuando $r = 4$, de la tabla IV encontramos: si $\chi^2 = 2$, $p = 0{,}7358$; si $\chi^2 = 3$, $p =$ $= 0{,}5578$; si $\chi^2 = 2{,}152$, $p = 0{,}7358 - 0{,}152 \cdot 0{,}178 = 0{,}7358 - 0{,}0271 = 0{,}7087$.

Así,pues, se puede considerar que la distribución estadística dada concuerda plenamente con la ley de distribución que tiene una densidad uniforme.

905. Se da la distribución estadística

I	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[	]25, 30[	]30, 35]	]35, 40[	]40, 45[	]45, 50[
n_x	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

Aclarar si concuerda o no esta distribución con la teórica que tiene una densidad uniforme.

Resolución. Aquí $n = 70$. Componemos la tabla

X	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
W	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

Luego, hallamos

$$M(X) = \sum_{i=1}^{10} w_i x_i = 2{,}5\,(0{,}029 + 3\cdot 0{,}171 + 5\cdot 0{,}114 + 7\cdot 0{,}057 +$$
$$+ 9\cdot 0{,}2 + 11\cdot 0{,}086 + 13\cdot 0{,}14 + 15\cdot 0{,}029 + 17\cdot 0{,}014 + 19\cdot 0{,}157) =$$
$$= 24{,}4285;$$
$$M(X^2) = 2{,}5^2\,(0{,}029 + 9\cdot 0{,}171 + 25\cdot 0{,}114 + 49\cdot 0{,}057 + 81\cdot 0{,}2 +$$
$$121\cdot 0{,}086 + 169\cdot 0{,}143 + 225\cdot 0{,}029 + 289\cdot 0{,}014 + 361\cdot 0{,}157) = 782{,}67;$$
$$D(X) = 782{,}67 - 596{,}75 = 185{,}92; \quad \sigma(X) = \sqrt{185{,}92} = 13{,}63.$$

Planteemos y resolvamos el sistema de ecuaciones para determinar a y b:

$$\begin{cases} (a+b)/2 = 24{,}43 \\ (b-a)/(2\sqrt{3}) = 13{,}63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 48{,}86 \\ b-a = 47{,}16 \end{cases} \Leftrightarrow (b = 48{,}01;\ a = 0{,}85);$$
$$1/(b-a) = 1/47{,}16 = 0{,}0212.$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0{,}85; \\ 0{,}0212, & \text{si} \quad 0{,}85 \leqslant x \leqslant 48{,}01 \\ 0 & \text{si} \quad x > 48{,}01. \end{cases}$$

Ahora hallamos las probabilidades de que la variable aleatoria distribuida por la ley indicada tome los valores pertenecientes a los intervalos]0, 5[,]5, 10[,]10, 15[, . . .,]45, 50[:

I	]—5, 0[	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[
P	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106
I	]25, 30[	]30, 35[	]35, 40[	]40, 45[	]45, 50[	]50, 55[
P	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

Notemos que

$$P(0 < X < 5) = P(0{,}85 < X < 5) = 4{,}15\cdot 0{,}0212 = 0{,}088;$$
$$P(45 < X < 50) = P(45 < X < 48{,}01) = 3{,}01\cdot 0{,}0212 = 0{,}064.$$

La tabla de cálculo para determinar χ^2 tiene la forma

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,029	0,088	−0,059	0,003	0,034
0,171	0,106	0,065	0,004	0,038
0,114	0,106	0,008	0,006	0,057
0,057	0,106	−0,049	0,002	0,019
0,2	0,106	0,094	0,009	0,085
0,086	0,106	−0,020	0,000	0,000
0,143	0,106	0,037	0,001	0,009
0,029	0,106	−0,077	0,006	0,057
0,014	0,106	−0,092	0,008	0,075
0,157	0,064	−0,093	0,009	0,141
				0,515

De suerte que $\chi^2 = 70 \cdot 0{,}515 = 36{,}05$; $l = 10$, $t = 3$, $r = 7$. Cuando el valor $r = 7$ para $\chi^2 = 30$ de la tabla IV encontramos $P = 0{,}0001$. Como para el valor constante de r con el aumento de χ^2 la probabilidad P disminuye, entonces para $\chi^2 = 36{,}05$ la probabilidad $P \leqslant 0{,}0001$. Esto quiere decir que en el caso dado la teoría reproduce mal la prueba.

Se puede llegar a la misma conclusión utilizando el criterio de Romanovski. En efecto, hallamos

$$\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|36{,}05 - 7|}{\sqrt{14}} = \frac{29{,}05}{3{,}742} \simeq 7{,}763 > 3.$$

Así, pues, la hipótesis acerca de que la distribución estadística dada sea una distribución con densidad uniforme debe considerarse inverosímil.

906. Aplicar los criterios de Pearson y Romanovski para establecer la verosimilitud de la hipótesis acerca de una distribución normal de la variable aleatoria en el problema 901.

Resolución. La tabla de cálculo tiene la forma

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
0,06	0,04	0,02	0,0004	0,01
0,08	0,09	−0,01	0,0001	0,001
0,12	0,15	−0,03	0,0009	0,006
0,22	0,20	0,02	0,0004	0,02
0,2	0,20	0,00	0,0000	0,00
0,14	0,15	−0,01	0,0001	0,0007
0,1	0,09	0,01	0,0001	0,001
0,04	0,04	0	0,0000	0,00
0,02	0,02	0	0,0000	0,00

Luego tenemos $n\sum_{i=1}^{10}\frac{(w_i-p_i)^2}{p_i}=50\cdot 0{,}0387=1{,}935$; $l=10$, $t=3$, $r=10-3=7$. De la tabla IV hallamos para $r=7$: si $\chi^2=1$, $P=0{,}9948$; si $\chi^2=2$, $P=0{,}9598$. Por consiguiente, para $\chi^2=1{,}935$ obtendremos un valor intermedio de P. Este valor se puede hallar aplicando el método de interpolación. Para $\chi^2=1$ y $\chi^2=2$ los valores de P se diferencian en $0{,}9948-0{,}9598=0{,}035$. Con el aumento de χ^2 la probabilidad P disminuye, por eso para $\chi^2=1{,}935$ tenemos

$$P=0{,}9598+0{,}065\cdot 0{,}035=0{,}9621, \text{ o de otro modo } P=0{,}9948-0{,}935\cdot 0{,}035=0{,}9621.$$

La probabilidad obtenida es mayor que 0,1. De acuerdo con el criterio de Pearson esto es una razón para considerar que la ley normal reproduce bastante satisfactoriamente la distribución estadística dada.

De acuerdo con el criterio de Romanovski tenemos

$$\frac{|\chi^2-r|}{\sqrt{2r}}=\frac{|1{,}935-7|}{\sqrt{14}}=\frac{5{,}065}{3{,}742}\simeq 1{,}354<3.$$

Por lo tanto, la diveregencia entre la distribución estadística dada y la distribución teórica que la iguala se puede considerar casual.

907. Efectuar la igualación con ayuda de la ley normal de distribución de los datos de la tabla estadística:

I	]4, 1; 4, 2[	]4, 2; 4, 3[	]4, 3; 4, 4[	]4, 4; 4, 5[	]4, 5; 4, 6[	]4, 6; 4, 7[	]4, 7; 4, 8[	]4, 8; 4, 9[	]4, 9; 5[
n_x	1	2	3	4	5	8	8	9	10
I	]5, 0; 5, 1[	]5, 1; 5, 2[	]5, 2; 5, 3[	]5, 3; 5, 4[	]5, 4; 5, 5[	]5, 5; 5, 6[	]5, 6; 5, 7[	]5, 7; 5, 8[	]5, 8; 5, 9[
n_x	10	9	9	7	5	4	3	2	1

Comprobar la concordancia de las distribuciones estadística y teórica por los criterios de Pearson y Romanovski.

Resolución. Aquí $n=100$. En adelante supondremos que los valores de la variable aleatoria coinciden con los valores medios aritméticos de las fronteras de los intervalos:

X	4,15	4,25	4,35	4,45	4,55	4,65	4,75	4,85	4,95	5,05	5,15	5,25	5,35	5,45	5,55	5,65	5,75	5,85
W	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,08	0,08	0,09	0,1	0,1	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

Como los valores de la variable aleatoria son próximos a 5, construimos la tabla

$X-5$	W	$(X-5)\,W$	$(X-5)^2\,W$
−0,85	0,01	−0,0085	0,0072
−0,75	0,02	−0,0150	0,0113
−0,65	0,03	−0,0195	0,0127
−0,55	0,04	−0,0220	0,0121
−0,45	0,05	−0,0225	0,0101
−0,35	0,08	−0,0280	0,0098
−0,25	0,08	−0,0200	0,0050
−0,15	0,09	−0,0135	0,0020
−0,05	0,1	−0,0500	0,0003
0,05	0,1	0,0500	0,0003
0,15	0,09	0,0135	0,0020
0,25	0,09	0,0225	0,0056
0,35	0,07	0,0245	0,0086
0,45	0,05	0,0225	0,0101
0,55	0,04	0,0220	0,0121
0,65	0,03	0,0195	0,0127
0,75	0,02	0,0150	0,0113
0,85	0,01	0,0085	0,0072
		−0,001	0,1404

Por consiguiente,

$$M\,(X-5) = -\,0{,}001; \quad M\,[(X-5)^2] = 0{,}1404; \quad M\,(X) = 5 + M\,(X-5) = 4{,}999;$$

$$D\,(X) = M\,[(X-5)^2] - [M\,(X-5)^2] = 0{,}1404; \quad \sigma\,(X) = \sqrt{0{,}1404} = 0{,}3747 \approx 0{,}375.$$

La densiadd de distribución de la variable aleatoria X se determina por la igualdad

$$f\,(x) = \frac{1}{0{,}375\,\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-5)^2/(2\cdot 0{,}375^2)}, \qquad (*)$$

o bien

$$f\,(x) = 2{,}67 \cdot z_u, \text{ donde } u = (x-5)/0{,}375 \approx 2{,}67\,(x-5).$$

Determinemos la probabilidad de que la variable aleatoria distribuida por la ley normal indicada tome los valores pertenecientes a los intervalos]4, 1; 4,2[,]4,2; 4,3[, . . .,]5,8; 5,9[y comprobemos la concordancia de las distribuciones estadística y teórica por los criterios de Pearson y Romanovski. Construimos las tablas:

x	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$	W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
4,15	—2,27	0,03	0,08	0,01	0,01	0,01	0,00	0,0000	0,000
4,25	—2,00	0,05	0,13	0,02	0,02	0,02	0,00	0,0000	0,000
4,35	—1,74	0,09	0,24	0,02	0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
4,45	—1,47	0,13	0,35	0,04	0,04	0,04	0,00	0,0000	0,000
4,55	—1,20	0,19	0,51	0,05	0,05	0,05	0,00	0,0000	0,000
4,65	—0,93	0,25	0,67	0,07	0,08	0,07	0,01	0,0001	0,001
4,75	—0,66	0,32	0,85	0,09	0,08	0,09	—0,01	0,0001	0,001
4,85	—0,40	0,37	0,99	0,10	0,09	0,10	—0,01	0,0001	0,001
4,95	—0,13	0,39	1,04	0,10	0,10	0,10	0,00	0,0000	0,000
5,05	0,13	0,39	1,04	0,10	0,10	0,10	0,00	0,0000	0,000
5,15	0,40	0,37	0,99	0,10	0,09	0,10	—0,01	0,0001	0,001
5,25	0,66	0,32	0,85	0,09	0,09	0,09	0,00	0,0000	0,000
5,35	0,93	0,25	0,67	0,07	0,07	0,07	0,00	0,0000	0,000
5,45	1,20	0,19	0,51	0,05	0,05	0,05	0,00	0,0000	0,000
5,55	1,47	0,13	0,35	0,04	0,04	0,04	0,00	0,0000	0,000
5,65	1,74	0,09	0,24	0,02	0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
5,75	2,00	0,05	0,13	0,02	0,02	0,02	0,00	0,0000	0,000
5,85	2,27	0,03	0,08	0,01	0,01	0,01	0,00	0,0000	0,000

Por consiguiente, $\chi^2 = 100 \cdot 0{,}014 = 1{,}4$, $l = 18$, $t = 3$, $r = 18-3 = 15$. De la tabla IV encontramos para $r = 15$; si $\chi^2 = 1$, $P = 1{,}000$, si $\chi^2 = 2$, $P = 1{,}000$. Por eso para $\chi^2 = 1{,}4$ la probabilidad buscada* $P = 1{,}000$. Ahora bien, de acuerdo con el criterio de Pearson la hipótesis acerca de que la distribución estadística sea una distribución normal con esperanza matemática igual a 5 y varianza igual a 0,14, es verosímil.

Utilizamos ahora el criterio de Romanovski:

$$\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|1{,}4-15|}{\sqrt{30}} = \frac{13{,}6}{5{,}477} \simeq 2{,}483 < 3.$$

Esto confirma una vez más que la distribución estadística dada concuerda con la normal que tiene la densidad definida por la igualdad (*).

908. Comprobar la hipótesis de que la distribución estadística examinada en el problema 903 concuerda con la distribución de Charlier.

Resolución. La tabla de cálculo tiene la forma

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,01	0,01	0	0,0000	0
0,05	0,04	0,01	0,0001	0,003
0,08	0,09	—0,01	0,0001	0,001
0,15	0,18	—0,03	0,0009	0,005
0,28	0,23	0,05	0,0025	0,011
0,21	0,20	0,01	0,0001	0,001
0,10	0,13	—0,03	0,0009	0,007
0,06	0,07	—0,01	0,0001	0,001
0,03	0,03	0,00	0,0000	0,000
0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
				0,034

*) Puesto que en la tabla los valores se dan con una precisión hasta 0,001, el valor buscado de P es un poco menor que la unidad.

Por consiguiente, $\chi^2 = 100 \cdot 0{,}034 = 3{,}4$; $l = 10$, $t = 5$, o sea, $r = 10 - 5 = 5$. De la tabla IV encontramos para $r = 5$: si $\chi^2 = 3$, $P = 0{,}7000$; si $\chi^2 = 4$, $P = 0{,}5494$. Por eso, para $\chi^2 = 3{,}4$ tenemos

$$P = 0{,}700 - 0{,}4 \cdot 0{,}1506 = 0{,}63976 > 0{,}1.$$

Utilizando el criterio de Romanovski, hallamos

$$\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|3{,}4-5|}{\sqrt{10}} = \frac{1{,}6}{3{,}162} = 0{,}506 < 3.$$

Así, pues, según los criterios de Pearson y Romanovski la hipótesis acerca de que la distribución estadística examinada concuerda con la distribución de Charlier se puede considerar verosímil.

6. **Criterio de aceptación de Kolmogórov.** Supongamos que se da la distribución estadística

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
W_x	w_1	w_2	w_3	...	w_l

donde $x_1, x_2, \ldots, x_l$ son los valores medios de los intervalos respectivos de la variable aleatoria. En calidad de medida de divergencia entre las distribuciones teórica y estadística en el criterio de Kolmogórov se examina el máximo de valores del módulo de diferencia entre la función estadística de distribución $F^*(x)$ y la función teórica (integral) respectiva de distribución $F(x)$

Como es sabido, la función integral de distribución se define por las relaciones

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < x_1; \\ \sum_{j=1}^{k} p_j, & \text{si} \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, l-1); \\ 1, & \text{si} \quad x \geqslant x_l, \end{cases}$$

donde $p_j = hf(x_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ y $f(x)$ es la densidad de distribución de la variable aleatoria X.

Primeramente se determina la magnitud

$$\lambda = D\sqrt{n}, \tag{1}$$

donde $D = \max |F^*(x) - F(x)|$ y n es el volumen de la muestra. Luego, de la igualdad

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2} \tag{2}$$

se determina la probabilidad de pue a cuenta de causas puramente aleatorias la divergencia máxima entre $F^*(x)$ y $F(x)$ resulte menor que la que se observa realmente.

Si la probabilidad $P(\lambda)$ es puqueña (menor que 0,05), la hipótesis debe rechazarse como inverosímil; si $P(\lambda)$ tiene valores comparativamente grandes, la hipótesis puede considerarse compatible con los datos experimentales.

Para hallar los valores de $P(\lambda)$ es cómodo valerse de la tabla (véase la tabla V, pág. 453).

909. Estimar el grado de concordancia de la distribución estadística examinada en el problema 899 con la de Poisson.

Resolución. Construimos la tabla

X	W	P	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x)-F(x)$
0	0,07	0,08	0,07	0,08	0,01
1	0,21	0,20	0,28	0,28	0
2	0,26	0,25	0,54	0,53	0,01
3	0,21	0,21	0,75	0,74	0,01
4	0,13	0,13	0,88	0,87	0,01
5	0,07	0,07	0,95	0,94	0,01
6	0,03	0,03	0,98	0,07	0,01
7	0,02	0,01	1	0,98	0,02

Es evidente que $D = \max|F^*(x) - F(x)| = 0{,}02$. Como $n = 100$, entonces, valiéndonos de la fórmula (1), hallamos $\lambda = 0{,}02\cdot\sqrt{100} = 0{,}2$. De la tabla V obtenemos $P(0{,}2) = 1{,}000$. Ahora bien, la distribución estadística examinada no contradice la teórica según la ley de Poisson.

910. Valiéndose del criterio de Kolmogórov, averiguar si concuerda o no con la distribución normal la estadística:

I	]0, 2[	]2, 4[	]4, 6[	]6, 8[	]8, 10[	]10, 12[	]12, 14[	]14, 16[	]16, 18[	]18, 20[
n_x	10	29	51	58	122	90	81	39	30	10

Resolución. Escribimos la distribución dada en la forma

X	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
W	0,02	0,06	0,10	0,12	0,20	0,18	0,16	0,08	0,06	0,02

Pasamos a una variable nueva T por la fórmula $X = 2T - 1$. Componemos la tabla de cálculo:

T	W	WT	WT^2
1	0,02	0,02	0,02
2	0,06	0,12	0,24
3	0,10	0,30	0,90
4	0,12	0,48	1,92
5	0,20	1,00	5,00
6	0,18	1,08	6,48
7	0,16	1,12	7,84
8	0,08	0,64	5,12
9	0,06	0,54	4,86
10	0,02	0,20	2,00
		5,50	34,38

Luego tenemos

$$M(T) = 5{,}50, \quad M(T^2) = 34{,}38, \quad D(T) = 34{,}38 - 30{,}25 = 4{,}13;$$

$$\sigma(T) = \sqrt{4{,}13} = 2{,}032;$$

$$M(X) = 2M(T) - 1 = 2 \cdot 5{,}5 - 1 = 10; \quad \sigma(X) = 2\sigma(T) = 2 \cdot 2{,}032 = 4{,}064.$$

Entonces la densidad de distribución se escribirá en la forma

$$f(x) = \frac{1}{4{,}064\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-10)^2/(2 \cdot 4{,}064^2)} \qquad (*)$$

o bien $f(x) = 0{,}246 \cdot z_u$, donde $u = (x - 10)/4{,}064$.

Componemos dos tablas:

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$
1	−2,214	0,035	0,009	0,02
3	−1,722	0,091	0,022	0,04
5	−1,230	0,187	0,046	0,09
7	−0,738	0,303	0,075	0,15
9	−0,246	0,387	0,095	0,19
11	0,246	0,387	0,095	0,19
13	0,738	0,303	0,075	0,15
15	1,230	0,187	0,046	0,09
17	1,722	0,091	0,022	0,04
19	2,214	0,035	0,009	0,02

X	W	$hf(x)$	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x) - F(x)$
1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,00
3	0,06	0,04	0,08	0,06	0,02
5	0,10	0,09	0,18	0,15	0,03
7	0,12	0.15	0,30	0,30	0,00
9	0,20	0,19	0,50	0,49	0,01
11	0,18	0,19	0,68	0,68	0,00
13	0,16	0,15	0,84	0,83	0,01
15	0,08	0,09	0,92	0,92	0,00
17	0,06	0,04	0,98	0,96	0,02
19	0,02	0,02	1	0,98	0,02

De la seguna tabla se ve que casi todos los valores de las frecuencias relativas son próximos a los valores respectivos de las probabilidades halladas con ayuda de la densidad de distribución definida por la igualdad (*). De ello se deduce directamente que la distribución estadística dada es normal. No obstante, para resolver definitivamente la cuestión acerca de la concordancia de la distribución estadística con la normal aplicamos el criterio de Kolmogórov.

Como se ve de la segunda tabla, $D = \max |F^*(x) - F(x)| = 0{,}03$. Puesto que $n = 500$, tenemos $\lambda = 0{,}03 \cdot \sqrt{500} \simeq 0{,}67$. De la tabla V encontramos $P(0{,}65) = 0{,}7920$, $P(0{,}70) = 0{,}7112$. Como con el aumento de λ la probabilidad $P(\lambda)$ disminuye, $0{,}7112 < P(0{,}67) < 0{,}7920$.

Así, pues, se puede afirmar que la frontera superior del error absoluto de la igualdad aproximada $F^*(x) \simeq F(x)$ será no menor que 0,03 para cualquier valor de x.

Capítulo VI. Concepto de ecuaciones en derivadas parciales

§ 1. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales elementales en derivadas parciales. Examinemos varios ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales.

911. Hallar la función $z=z(x, y)$ que satisface la ecuación diferencial $\frac{\partial z}{\partial x}=1$.

Resolución. Integrando, obtenemos $z = x + \varphi(y)$, donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria. Esto es la solución general de la ecuacion diferencial dada.

912. Resolver la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$, donde $z=z(x, y)$.

Resolución. Integrando dos veces con respecto a y, obtenemos $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x)$, $z = y^3 + y\cdot\varphi(x) + \psi(x)$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones arbitrarias.

913. Resolver la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

Resolución. Integrando la ecuación con respecto a x, tenemos $\frac{\partial z}{\partial y} = f(y)$. Al integrar el resultado obtenido con respecto a y hallamos $z = \varphi(x) + \psi(y)$, donde $\psi(y) = \int f(y)dy$.

914. Hallar la solución general de la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1$.

915. Hallar la solución general de la ecuación $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}=0$.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden, lineales con respecto a las derivadas parciales. Examinemos la ecuación diferencial

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z, \tag{1}$$

donde X, Y y Z son las funciones de x, y, z.

Resolvemos previamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Supongamos que la solución de este sistema se determina por las igualdades

$$\omega_1(x,\ y,\ z)=C_1,\quad \omega_2=(x,\ y,\ z)=C_2.$$

Entonces, la integral general de la ecuación diferencial (1) tiene la forma

$$\Phi\,[\omega_1(x,\ y,\ z),\quad \omega_2(x,\ y,\ z)]=0,$$

donde $\Phi(\omega_1,\ \omega_2)$ es una función continuamente derivable.

916. Hallar la integral general de la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Resolución. Examinemos el sistema de ecuaciones $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial y}{y}=\frac{\partial z}{z}$. Resolviendo la ecuación $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial y}{y}$, obtenemos $\frac{y}{x}=C_1$; la solución de la ecuación $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ es $\frac{z}{x}=C_2$. Ahora se puede hallar la integral general de la ecuación dada:

$$\Phi(y/x,\ z/x)=0,\ \text{o bien}\ z/x=\psi(y/x),$$

o sea, $z=x\psi(y/x)$, donde ψ es una función arbitraria.

917. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Resolución. Escribimos el sistema de ecuaciones $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{0}$. Aprovechando la propiedad de las proporciones, representamos la ecuación $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$ en la forma

$$\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy},\quad \text{o bien}\quad \frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}.$$

Integrando, obtenemos

$$-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C,\quad \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C,\quad \frac{2y}{x^2-y^2}=C.$$

La última igualdad se puede escribir en la forma $\frac{y}{x^2-y^2}=C_1$.

La segunda ecuación del sistema $dz=0$. De ello $z=C_2$.

La integral general tiene la forma

$$\Phi\left(\frac{y}{(x^2-y^2)},\quad z\right)=0,\quad \text{o bien}\quad z=\psi\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right).$$

918. Hallar una superficie que satisfaga la ecuación $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$ y pase por la circunferencia $x^2+y^2=16$, $z=3$.

Resolución. Vamos a resolver el sistema de ecuaciones $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=$ $=-\frac{dz}{2xy}$. Quitando el denominador, tenemos

$$x\,dx=y\,dy,\quad 2x\,dx=-z\,dz.$$

Integrando ambas ecuaciones, obtenemos

$$x^2-y^2=C_1,\quad x^2+\frac{z^2}{2}=C_2.$$

La integral general de la ecuación dada tiene la forma

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\psi(x^2-y^2). \qquad (*)$$

De la familia de superficies que se definen por esta ecuación es necesario destacar la que pasa por la circunferencia $x^2+y^2=16$, $z=3$. Para hallar la función ψ, en la igualdad (*) hacemos $x^2=16-y^2$, $z=3$. Entonces obtenemos $16-y^2+9/2=\psi(16-2y^2)$. Sea que $16-2y^2=t$, de donde $y^2=8-t/2)$. Por consiguiente, $\psi(t)=(t+25)/2$, o sea, $\psi(x^2-y^2)=(x^2-y^2+25)/2$. Sustituyendo la expresión hallada en la relación (*), nos queda

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\frac{x^2-y^2+25}{2},\quad \text{o bien}\quad x^2+y^2+z^2=25.$$

De suerte que la superficie buscada es una esfera.

919. Hallar la integral general de la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x}\operatorname{sen}x+\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}y=\operatorname{sen}z.$$

920. Hallar la integral general de la ecuación $yz\frac{\partial z}{\partial x}+$ $+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

921. Hallar una superficie que satisfaga la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+$ $+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$ y que pase por la parábola $y^2=z$, $x=0$.

§ 2. Tipos de ecuaciones de segundo grado en derivadas parciales. Reducción a la forma canónica

Examinemos la ecuación de segundo orden

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \qquad (1)$$

donde a, b, c son funciones de x e y.

Se dice que la ecuación indicada en el dominio D pertenece al *tipo hiperbólico* si en este dominio $b^2-ac>0$. Sin embargo, si $b^2-ac=0$, la ecuación pertenece al *tipo parabólico* y si $b^2-ac<0$, al *tipo elíptico*.

La ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

se llama *ecuación canónica de tipo hiperbólico*; la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

se llama *ecuación canónica de tipo parabólico*; la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

se llama *ecuación canónica de tipo elíptico*.

La ecuación diferencial

$$a\,(dy)^2-2b\,dx\,dy+c\,(dx^2)=0$$

se denomina *ecuación de características* de la ecuación (1).

Para una ecuación hiperbólica la ecuación de características tiene dos integrales: $\varphi(x,y)=C_1$, $\psi(x,y)=C_2$, o sea existen dos familias de características reales. Con ayuda de la sustitución de las variables $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\psi(x,\ y)$ la ecuación diferencial (1) se reduce a la forma canónica.

Para una ecuación parabólica ambas familias de características coinciden, o sea la ecuación de características da solamente una integral $\varphi(x,\ y)=C$. En este caso es necesario efectuar la sustitución de las variables $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\psi(x,\ y)$, donde $\psi(x,\ y)$ es una función cualquiera para la cual $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0$. Una vez efectuada tal sustitución, la ecuación se reduce a la forma canónica.

Para una ecuación elíptica las integrales de la ecuación de características tienen la forma $\varphi(x,\ y)\pm i\psi(x,\ y)=C_{1,2}$, donde $\varphi(x,\ y)$ y $\psi(x,\ y)$ son funciones reales. Con ayuda de la sustitución $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\psi(x,\ y)$ la ecuación (1) se reduce a la forma canónica.

922. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Resolución. Aquí, $a=x^2$, $b=0$, $c=-y^2$, $b^2-ac=x^2y^2>0$; por consiguiente, es una ecuación hiperbólica.

Escribimos la ecuación de características:

$$x^2\,(dy)^2-y^2\,(dx)^2=0,\quad \text{o bien}\quad (x\,dy+y\,dx)\,(x\,dy-y\,dx)=0.$$

Obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$x\,dy+y\,dx=0\quad \text{y}\quad x\,dy-y\,dx=0;$$

separando las variables e integrando, tenemos

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0,\quad \text{o sea,}\quad \ln y+\ln x=\ln C_1,$$

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{dx}=0,\quad \text{o sea,}\quad \ln y-\ln x=\ln C_2.$$

Después de la potenciación encontramos $xy=C_1$ e $y/x=C_2$, o sea, las ecuaciones de dos familias de características. Introducimos las nuevas variables $\xi = xy$, $\eta = y/x$. Expresamos las derivadas parciales con respecto a viejas variables por las derivadas parciales con respecto a las nuevas variables:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y-\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)y-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot\frac{y}{x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)y-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot y-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y}{x^2}\right)\frac{y}{x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y^2-$$

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, las expresiones halladas para las segundas derivadas, obtenemos

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^3}\right)-$$

$$-y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0;$$

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot y^2+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x}=0;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{xy}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

o sea, la ecuación está reducida a la forma canónica.

923. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\operatorname{sen}^2 x-2y\operatorname{sen} x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Resolución. Aquí $a=\operatorname{sen}^2 x$, $b=-y\operatorname{sen} x$, $c=y^2$. Puesto que $b^2-ac = y^2\operatorname{sen}^2 x - y^2\operatorname{sen}^2 x = 0$, la ecuación dada es parabólica.

La ecuación de características tiene la forma

$\operatorname{sen}^2 x\,(dy)^2+2y\operatorname{sen} x\,dx\,dy+y^2(dx)^2=0$, o sea, $(\operatorname{sen} x\,dy+y\,dx)^2=0$.

Separando en la ecuación $\operatorname{sen} x\,dy+y\,dx=0$ las variables e integrando, tenemos

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=0;\qquad \ln y+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\ln C;\qquad y\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=C$$

Efectuamos la sustitución de las variables: $\xi = y\cdot tg\frac{x}{2}$, $\eta = y$ (función arbitraria). Entonces obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot y\sec^2\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot y^2\cdot\sec^4\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)y\cdot\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec\cdot\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)y\cdot\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec^2\frac{x}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada las expresiones para las segundas derivadas, tenemos

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot y^2\cdot\sec^4\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}^2 x-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)\cdot y^2\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} x-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} x+$$

$$=y^2\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right)=0.$$

Fácilmente se puede mostrar que los términos que contienen $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}$ se eliminan mutuamente y la ecuación toma la forma

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}^2 x+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} x=0,$$

o bien

$$y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\operatorname{sen} x.$$

Puesto que $\operatorname{sen} x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$ y $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\xi}{\eta}$, $\operatorname{sen} x=\frac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Finalmente obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

924. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Resolución. Aquí $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $b^2-ac=-1<0$, o sea, la ecuación es elíptica.

La ecuación de características tiene la forma

$$(dy)^2+2dx\,dy+2(dx)^2=0, \quad \text{o bien} \quad y'+2y'+2=0$$

De aquí, $y'=-1\pm i$; obtenemos dos familias de características imaginarias: $y+x-ix=C_1$ e $y+x+ix=C_2$. Efectuando la sustitución de las variables $\xi=y+x$ y $\eta=x$, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Sustituyendo las expresiones halladas en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=0, \text{ sea, } \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0.$$

Reducir a la forma canónica las ecuaciones:

925. $x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

926. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

927. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{x^2}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

§ 3. Ecuación de la oscilación de una cuerda

1. Resolución de la ecuación de la oscilación de una cuerda por el método de características (método de d'Alembert). Se llama cuerda a un hilo fino que puede encorvarse libremente. Sea que la *cuerda* está bajo una tensión inicial fuerte T_0. Si la cuerda se hace salir de la posición de equilibrio y se somete a la acción de una fuerza cualquiera, ella comienza a oscilar (vibrar) (fig. 55).

Nos limitaremos a examinar oscilaciones pequeñas, transversales y planas, de una cuerda, o sea, aquellas en que las desviaciones de los puntos de la cuerda con respecto a la posición de reposo sean pequeñas; en un instante cualquiera de tiempo todos los puntos de la cuerda están en un mismo plano y cada punto de la cuerda oscile permaneciendo en la misma perpendicular a la recta correspondiente al estado de reposo de la cuerda.

Tomando esta recta por el eje Ox, designamos con $u = u(x, t)$ la desviación de los puntos de la cuerda con respecto a la posición de equilibrio en un instante de tiempo t. Para cada valor fijo de t el gráfico de la función $u = u(x, t)$ sobre el plano xOu representa la forma de la cuerda en el instante de tiempo t.

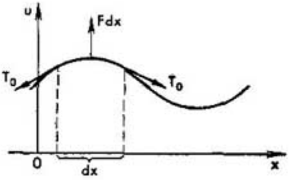

Fig. 55

La función $u = u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

donde $a^2 = T_0/\rho$, $f = F/\rho$; ρ es la masa de la unidad de longitud (densidad lineal de la cuerda), F es la fuerza que actúa sobre la cuerda de un modo perpendicular al eje de las abscisas, calculada para la unidad de longitud.

Si la fuerza externa falta, o sea, $f = 0$, entonces se obtiene la ecuación de oscilaciones (vibraciones) libres de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para una determinación completa del movimiento de la cuerda es necesario prefijar en el instante inicial la forma y la velocidad de la cuerda, o sea, la posición de sus puntos y la velocidad de estos últimos en forma de las funciones de las abscisas x de los mismos. Sea $u \mid_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{du}{dt} \mid_{t=0} = \psi(x)$. Estas condiciones se llaman *condiciones iniciales* del problema.

Reduciendo la ecuación $\frac{d^2 u}{dt^2} - a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ a la forma canónica, obtenemos la ecuación $\frac{d^2 u}{d\xi d\eta} = 0$, donde $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. La solución general de la última ecuación se escribirá así: $u = \theta_1(\mu) + \theta_2(\eta)$, donde $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, θ_1, θ_2 son funciones arbitrarias.

De este modo, la solución general de la ecuación de vibraciones libres tiene la forma

$$y = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at).$$

Escogiendo las funciones Θ_1 y Θ_2 de modo que la función $u = u(x, t)$ satisfaga las condiciones iniciales indicadas, llegamos a la solución de la ecuación diferencial inicial en la forma

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz.$$

928. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{si} \quad u\Big|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Resolución. Como $a=1$ y $\psi(x)=0$, $u=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$, donde $\varphi\times\times(x)=x^2$. Así que

$$u=\frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}, \quad \text{o sea } u=x^2+t^2.$$

929. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{si} \quad u\Big|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x.$$

Resolución. Aquí $a=2$, $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=x$. De donde

$$u=\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} z\,dz=\frac{1}{8}z^2\Big|_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{8}[(x+2t)^2-(x-2t)], \text{ o sea, } n=xt.$$

930. Hallar la forma de la cuerda definida por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en el instante $t=\dfrac{\pi}{2a}$, si $u\Big|_{t=0}=\operatorname{sen} x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1$.

Resolución. Tenemos

$$u=\frac{\operatorname{sen}(x+at)+\operatorname{sen}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x+at}^{x+at} dz,$$

o sea,

$$u=\operatorname{sen} x\cdot\cos at+\frac{1}{2a}\cdot z\Big|_{x-at}^{x+at}, \text{ o bien } u=\operatorname{sen} x\cdot\cos at+t.$$

Si $t=\pi/(2a)$, $u=\pi/(2a)$, o sea la cuerda es paralela al eje de las abscisas.

931. Hallar la solución de la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u\Big|_{t=0}=x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-x$.

932. Hallar la solución de la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u\Big|_{t=0}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$.

933. Hallar la forma de la cuerda definida por la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en el instante $t=\pi$, si $u\Big|_{t=0}=\operatorname{sen} x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$.

Resolución de la ecuación de la cuerda por el metodo de Fourier. La solución de la ecuación diferencial

$\dfrac{d^2 u}{dt^2}=a^2\dfrac{d^2 u}{dx^2}$ que satisface las condiciones iniciales

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$

(se supone que $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ sobre el segmento [0, 1] son dos veces derivables continuamente, con ello $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ y $\psi(0) = \psi(l) = 0$) y las condiciones de frontera (de contorno)

$$u\,|_{x=0} = 0, \quad u\,|_{x=l} = 0,$$

puede ser representada como la suma de la serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi a t}{l}) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}, \tag{1}$$

donde

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Las condiciones de frontera indicadas se introducen al estudiar las vibraciones de la cuerda larga l sujetada en dos puntos: $x = 0$ y $x = l$.

934. La cuerda sujetada en los extremos $x = 0$, y $x = l$ tiene en el instante inicial la forma de la parábola $u = (4h/l^2) \times x(l - x)$. Determinar el desplazamiento de los puntos de la cuerda respecto al eje de abscisas si las valocidades iniciales faltan (fig. 56).

Resolución. Aquí $\varphi(x) = (4h/l^2)\cdot x(l - x)$, $\psi(x) = 0$. Hallamos los coeficientes de la serie que determina la solución de la ecuación de la cuerda oscilante:

$$a_k = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l \varphi(x)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{8h}{l^3}\cdot\int_0^l (lx - x^2)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx; \qquad b_k = 0.$$

Para hallar los coeficientes a_k se integra dos veces por partes:

$$u_1 = lx - x^2,\ dv_1 = \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{1}\,dx,\ du_1 = (l - 2x)\,dx,\ v_1 = -\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k = -\frac{8h}{l^3}(lx - x^2)\cdot\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2}\cdot\int_0^l (l - 2x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

o sea,

$$a_k = \frac{8h}{k\pi l^2}\cdot\int_0^l (l - 2x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

$$u_2 = l - 2x, \quad dv_2 = \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad du_2 = -2\,dx, \quad v_2 = \frac{l}{k\pi}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k = \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l - 2x)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{16h}{k^2\pi^2 l}\cdot\int_0^l \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot[1 - (-1)^k].$$

Sustituyendo las expresiones para a_k y b_k en la igualdad (1), obtenemos

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot[1-(-1)^k]\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}.$$

Pero si $k = 2n$, entonces $1-(-1)^k = 0$ y si $k = 2n+1$, entonces $1-(-1)^k = 2$; por eso finalmente tenemos

$$u(x, t)=\frac{32h}{\pi^3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

935. Se da una cuerda sujetada sobre los extremos $x = 0$ y $x = l$. Supongamos que en el instante inicial la cuerda tiene la forma de la

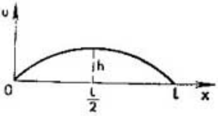

Fig. 56

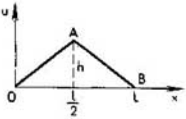

Fig. 57

quebrada OAB representada en la fig. 57. Hallar la forma de la cuerda para un instante de tiempo cualquiera t si faltan las velocidades iniciales.

Resolución. El coeficiente angular de la recta OA es igual a $h/(l/2)$, o sea, $2h/l$. Por consiguiente, la ecuación de esta recta es $u = (2h/l)x$. La recta AB trunca sobre los ejes de coordenadas los segmentos l y $2h$, por eso la ecuación de esta recta tiene la forma $x/l + u/(2h) = 1$, o bien $u = (2h/l)(l-x)$. Así pues

$$\varphi(x)=\begin{cases}(2h/l)\,x, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant l/2\\ (2h/l)\,(l-x), & \text{si} \quad l/2\leqslant x\leqslant l.\end{cases} \qquad \psi(x)=0.$$

Encontramos

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{4h}{l^2}\cdot\int_0^{l/2} x\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{4h}{l^2}\cdot\int_{l/2}^{l}(l-x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad b_k=0.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$a_k=-\frac{4h}{k\pi l}\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{4h}{k\pi l}\cdot\int_0^{l/2}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx-$$

$$-\frac{4h}{k\pi l}(l-x)\cos\Big|_{l/2}^{l}-\frac{4h}{k\pi l}\cdot\int_{l/2}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=-\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=$$
$$=\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}+\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}=\frac{8h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}.$$

Por consiguiente

$$u(x,\ t)=\frac{8h}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}.$$

Escribimos algunos términos de la serie:

$$u(x,\ t)=\frac{8h}{\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi at}{l}-\frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi at}{l}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l}\cdot\cos\frac{5\pi at}{l}-\frac{1}{7^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi x}{l}\cdot\cos\frac{7\pi at}{l}+\ldots\right).$$

936. Supongamos que las desviaciones iniciales de una cuerda sujetada en los puntos $x=0$ y $x=l$ son iguales a cero y la velocidad inicial se expresa por la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\begin{cases} v_0\,(\text{const}), & \text{si}\quad |x-l/2|<h/2;\\ 0, & \text{si}\quad |x-l/2|>h/2.\end{cases}$$

Determinar la forma de la cuerda para un instante de tiempo cualquiera t.

Resolución. Aquí $\varphi(x)=0$ y $\psi(x)=v_0$ en el intervalo $](l-h)/2,\ (l+h)/2[$ y $\psi(x)=0$ fuera de este intervalo.
Por lo tanto, $a_k=0$;

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\cdot\int_{(l+h)/2}^{(l+h)/2}v_0\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx=-\frac{2v_0}{k\pi a}\cdot\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{(l-h)/2}^{(l+h)/2}=$$
$$=\frac{2v_0l}{k^2\pi^2a}\cdot\left[\cos\frac{k\pi(l-h)}{2l}-\cos\frac{k\pi(l+h)}{2l}\right]=\frac{4v_0l}{k^2\pi^2a}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi h}{2l}.$$

De donde

$$u(x,\ t)=\frac{4v_0l}{\pi^2a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi h}{2l}\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l},$$

o bien,

$$u(x,\ t)=\frac{4v_0l}{\pi^2a}\cdot\left(\operatorname{sen}\frac{\pi h}{2l}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi h}{2l}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi at}{l}\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi h}{2l}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l}-\ldots\right).$$

937. Una cuerda está sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = 3$. En el instante inicial la cuerda tiene la forma de la quebrada OAB, donde $O\ (0;\ 0)$, $A\ (2;\ -0,1)$, $B\ (3;\ 0)$ (fig. 58). Hallar la forma de la cuerda para un momento de tiempo cualquiera t si faltan las velocidades iniciales de los puntos de la cuerda.

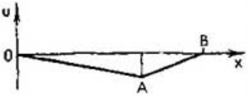

Fig. 58

938. Una cuerda sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = 1$, en el instante inicial tiene la forma $u = h\ (x^4 - 2x^3 + x)$. Hallar la forma de la cuerda para un instante de tiempo cualquiera t si las velocidades iniciales faltan.

939. Una cuerda está sujetada en los puntos $x = 0$ y $x = l$. Las desviaciones iniciales de los puntos de la cuerda son iguales a cero y la velocidad inicial se expresa por la fórmula

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi\,(x - l/2)}{h}, & \text{si } \left|x - \dfrac{l}{2}\right| < \dfrac{h}{2}; \\ 0 & \text{si } \left|x - \dfrac{l}{2}\right| > \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Hallar la forma de la cuerda para un instante de timpo cualquiera t.

§ 4. Ecuación de conducción del calor

1. Ecuación de conducción del calor para un caso no estacionario. Designamos por $u = u\ (M,\ t)$ la temperatura en un punto M de un cuerpo homogéneo, limitado por una superficie S, en un instante t. Es sabido que la cantidad de calor dQ absorbida por el cuerpo en el transcurso del tiempo dt se expresa por la igualdad

$$dQ = k \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, dt, \tag{1}$$

donde dS es el elemento de la superficie, k es el llamado coeficiente de conductibilidad térmica interna, $\frac{du}{dn}$ es la derivada de la función u según el sentido de la normal exterior a la superficie S. Como el calor fluye en la dirección de la disminución de la temperatura, entonces $dQ > 0$ si $\frac{du}{dn} > 0$ y $dQ < 0$ si $\frac{du}{dn} < 0$. De la igualdad (1) resulta que

$$Q = dt \cdot \iint_S k \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\, dS.$$

Calculamos Q por otro procedimiento. Separemos el elemento dV del volumen V limitado por la superficie S. La cantidad de calor dQ obtenida por el elemento dV en el transcurso del tiempo dt es proporcional al aumento de la temperatura en este elmento a y la masa del mismo elemento, o sea,

$$dQ = \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\, dt \cdot \rho\, dV, \tag{2}$$

donde ρ es la densidad de la substancia y γ, el coeficiente de proporcionalidad llamado capacidad calorífica de la substancia. De la igualdad (2) resulta que

$$Q = dt \cdot \iiint\limits_V \gamma \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV.$$

Así, pues, tenemos

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = a^2 \cdot \iint\limits_S \frac{\partial u}{dn} dS,$$

donde $a^2 = \frac{k}{\rho\gamma}$. Teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial n} = |\text{grad } u|$ y $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$, transformamos la igualdad obtenida de un modo tal que presente el aspecto

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = a^2 \iint\limits_S \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) \right] dS.$$

Sustituyendo el segundo miembro de la igualdad con ayuda de la fórmula de Ostrogradski-Gauss, obtenemos

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = a^2 \iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV.$$

De aquí, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

llamada *ecuación de conducción del calor para un caso no estacionario.*

Si el cuerpo es una varilla orientada por el eje Ox, entonces la ecuación de conducción del calor tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Examinemos el problema de Cauchy para los tres casos siguientes.

1. *Caso de una varilla ilimitada.* Se plantea el problema de hallar la solución $u(x, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

que satisface la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Aplicando el método de Fourier, obtenemos la solución de la ecuación en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot e^{-(\xi - x)^2/(4a^2 t)} d\xi.$$

2. *Caso de la varilla limitada por un lado.* La solución de la ecuación $\frac{du}{dt} = a^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$, que satisface la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y la condición de contorno $u(0, t) = \varphi(t)$, se expresa por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} f(\xi) \cdot [e^{-(\xi - x)^2/(4a^2t)} - e^{-(\xi + x)^2/(4a^2t)}] \, d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^t \psi(\eta) \cdot e^{x^2/(4a^2(t-\eta))} (t-\eta)^{-3/2} \, d\eta.$$

3. *Caso de una varilla limitada por ambos extremos* $x = 0$ y $x = l$. Aquí el problema de Cauchy consiste en hallar la solución de la ecuación $\frac{du}{dt} = a^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$ que satisface la condición inicial $u(x, t)\,|_{t=0} = f(x)$ y dos condiciones de contorno, por ejemplo, $u_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, o bien $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$.
En este caso la solución particular se busca en forma de la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot e^{-(k\pi a/l)^2 \cdot t} \cdot \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l},$$

donde

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \, dx$$

(para las condiciones de contorno $u\,|_{x=0} = u\,|_{x=l} = 0$) y en forma de serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot e^{-(k\pi a/l)^2 \cdot t} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} + a_0,$$

donde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx, \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \, dx$$

$\left(\text{para las condiciones de contoro } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\right)$.

940. Resolver la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para la siguiente distribución inicial de la temperatura de la varilla:

$$u(x, t)\,|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} u_0, & \text{si} \quad x_1 < x < x_2; \\ 0, & \text{si} \quad x < x_1 \text{ o bien } x > x_2. \end{cases}$$

Resolución. La varilla es infinita, por eso la solución se escribirá en la forma de la integral de Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot e^{-(\xi - x)^2/(4a^2t)} \, d\xi.$$

Como $f(x)$ en el intervalo $]x_1, x_2[$ es igual a la temperatura constante u y fuera del intervalo la temperatura es igual a cero, la solución presentará el aspecto

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-(\xi - x)^2/(4a^2t)}\, d\xi.$$

El resultado obtenido se puede transformar en integral de probabilidades (véase la pág. 221).

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2}\, d\mu.$$

En efecto, haciendo $(x-\xi)/(2a\sqrt{t}) = \mu$, $d\xi = -2a\sqrt{t}\cdot d\mu$, obtendremos

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})}^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\, d\mu =$$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\, d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\, d\mu.$$

Por lo tanto, la solución se expresará por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \cdot \left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

De gráfico de la función $\Phi(z)$ sirve la curva representada en la fig. 59.

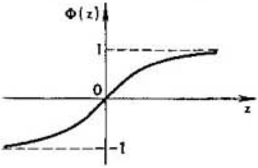

Fig. 59

941. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface la condición inicial $u|_{t=0} = f(x) = u_0$ y la condición de contorno $u|_{t=0} = 0$.

Resolución. Aquí tenemos la ecuación diferencial de conducción del calor para una varilla semiinfinita. La solución que satisface las condiciones indicadas tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} u_0 \cdot [e^{-(\xi - x)^2/(4t)} - e^{-(\xi + x)^2/(4t)}]\, d\xi,$$

o bien

$$u(x,\ t)=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{\infty}[e^{-(\xi-x)^2/(4t)}-e^{-(\xi+x)^2/(4t)}]\,d\xi.$$

Tomando $(x-\xi)/(2\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=-2\sqrt{t}\,d\mu$, transformamos la primera integral utilizando la integral de probabilidades, o sea,

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\xi-x)^2/(4t)}\,d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})}e^{-\mu^2}\,d\mu=\frac{u^2}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

Haciendo $(x+\xi)/(2\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=2\sqrt{t}\,d\mu$, obtendremos

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{\infty}e^{-(x+\xi)^2/(4t)}\,d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{x/(2\sqrt{t})}^{+\infty}e^{-\mu^2}\,d\mu=\frac{u_0}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

De este modo, la solución presentará el aspecto

$$u(x,\ t)=u_0\cdot\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

942. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l)$, $t>0$, que satisface las condiciones iniciales:

$$u\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x, & \text{si}\quad 0<x\leqslant l/2;\\ l-x, & \text{si}\quad l/2\leqslant x<l\end{cases}$$

y las condiciones de contorno: $u\,|_{x=0}=u\,|_{x=l}\equiv 0$.

Resolución. La solución del problema de Cauchy, que satisfase las condiciones de contorno indicadas, vamos a buscarla en la forma

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k e^{-(k\pi/l)^2\cdot t}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l},$$

donde

$$b_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l/2}x\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx+\frac{2}{l}\int\limits_{l/2}^{l}(l-x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Integramos por partes, suponiendo $u=x$, $dv=\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx$, $du=dx$ y $v=-\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$; obtenemos

$$b_k=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_0^{l/2}+$$

$$+\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}-\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=\frac{4l}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}.$$

Por consiguiente, la solución buscada tiene la forma

$$u=(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot e^{-k^2\pi^2t/l^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l},$$

o bien

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2t/l^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

943. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface las condiciones iniciales

$$u(x,t)\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}1-x/l, & \text{si}\quad 0\leqslant x\leqslant l;\\ 1+x/l, & \text{si}\quad -l\leqslant x\leqslant 0;\\ 0, & \text{si}\quad x\geqslant l\ \text{y}\ x\leqslant -l.\end{cases}$$

Indicación. La solución se expresará por la fórmula

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-l}^{0}\left(1+\frac{\xi}{l}\right)e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{0}^{l}\left(1-\frac{\xi}{l}\right)e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi.$$

Efectuando la sustitución $x-\xi/2\sqrt{t})=\mu$, simplificar la respuesta.

944. Hallar la solución de la ecuación de conducción del calor si el extremo izquierdo $x=0$ de una varilla semiinfinita está termoaislado y la distribución inicial de la temperatura es

$$u\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad x<0;\\ u_0, & \text{si}\quad 0<x<l;\\ 0, & \text{si}\quad l<x.\end{cases}$$

945. Se da una varilla homogénea fina de l de largo que está aislada del espacio exterior y tiene la temperatura inicial $f(x)=cx(l-x)/l^2$. Los extremos de la varilla se mantienen a la temperatura igual a cero. Determinar la temperatura de la varilla en el instante de tiempo $t>0$.

Indicación: la ley de distribución de la temperatura de la varilla se describe por la ecuación $\frac{du}{dt}=a^2\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$, la condición inicial $u\,|_{t=0}=f(x)=\frac{cx(l-x)}{l^2}$ y las condiciones de contorno $u\,|_{x=0}=u\,|_{x=l}=0$.

2. Ecuación de conducción del calor para un caso estacionario. La ecuación de conducción del calor para un caso estacionario se convierte en ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\qquad(1)$$

puesto que $\frac{du}{dt} = 0$. La ecuación de Laplace se puede escribir en la forma $\Delta u = 0$. Aquí u es función solamente del punto y no depende del tiempo.

Para los problemas que se refieren a figuras planas la ecuación de Laplace se escribe en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (2)$$

La ecuación de Laplace tiene la misma forma también para el espacio si u no depende de la coordenada z, o sea, $u(M)$ conserva un valor constante al desplazarse el punto M por una recta paralela al eje Oz. Efectuando la sustitución $x = r\cos\Theta$, $y = r\operatorname{sen}\Theta$, la ecuación (2) se puede transformar de modo que se exprese en coordenadas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\Theta+2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\Theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\Theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\operatorname{sen}\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\operatorname{sen}^2\Theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}r^2\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\Theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\Theta-\frac{\partial u}{\partial y}r\operatorname{sen}\Theta.$$

De aquí,

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

o bien

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=0.$$

Con la ecuación de Laplace está vinculado el concepto de función armónica. La función se llama *armónica* en el dominio D si en este dominio ella es continua junto con sus derivadas hasta el segundo orden, inclusive, y satisface la ecuación de Laplace. Así, para la ecuación (1) la función $u = 1/r$, donde $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, es armónica en un dominio cualquiera excluyendo el punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Para un dominio plano cualquiera de tal función sirve $u = \ln(1/r)$ (o bien $u = \ln r$), o sea, esta función satisface la ecuación (2).

El problema consistente en determinar una función u que sea armónico en un dominio D y continua en $\bar{D}$, incluyendo también la superficie S que limita este dominio, y que también satisfaga la condición de contorno u sobre $S = f(M)$, donde $f(M) = f(x, y, z)$, es una función definida continua sobre S, ha recibido el nombre de *problema de Dirichlet*.

946. Hallar la distribución estacionaria de la temperatura en una varilla fina que tiene la superficie lateral termoaislada, si sobre los extremos de la varilla $u\,|_{x=0} = u_0$, $u\,|_{x=l} = u_l$.

Resolución. El problema de Dirichlet para un caso unidimensional reside en determinar de la ecuación de Laplace $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ una función u que satisfaga las condiciones de contorno $u|_{x=0} = u_0$, $u|_{x=l} = u_l$. La solución general de la ecuación indicada es $u = Ax + B$ y, teniendo en cuenta las condiciones de contorno, obtenemos

$$u = \frac{u_l - u_0}{l} x + u_0,$$

o sea, la distribución estacionaria de la temperatura en una varilla fina que tiene la superficie lateral termoaislada es lineal.

947. Hallar la distribución estacionaria del calor en un espacio comprendido entre dos cilindros con el eje común Oz a condición de que sobre las superficies de los cilindros se mantenga una temperatura constante.

Indicación: pasar a las coordenadas cilíndricas considerando que u no depende de Θ y z.

§ 5. Problema de Dirichlet para el círculo

Supongamos que se da un círculo de radio R que tiene por centro el polo O del sistema polar de coordenadas. Vamos a buscar una función $u(r, \Theta)$ que sea armónica en el círculo y satisfaga sobre su circunferencia la condición $u|_{r=R} = f(\Theta)$, donde $f(\Theta)$ es una función dada continua sobre la circunferencia. La función buscada debe satisfacer en el círculo la ecuación de Laplace

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} = 0. \tag{1}$$

Para la resolución de este problema nos limitamos a aplicar el método de Fourier. Supongamos que la solución particular se busca en la forma

$$u = Q(r) \cdot T(\Theta).$$

Entonces obtendremos

$$r^2 \cdot Q''(r) \cdot T(\Theta) + r \cdot Q'(r) \cdot T(\Theta) + Q(r) \cdot T''(\Theta) = 0.$$

Dividimos las variables:

$$\frac{T''(\Theta)}{T(\Theta)} = -\frac{r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r)}{Q(r)}.$$

Igualando cada miembro de la igualdad obtenida a una constante $-k^2$, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$T'(\Theta) + k^2 \cdot T(\Theta) = 0, \quad r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r) - k^2 \cdot Q(r) = 0.$$

De ello, para $k = 0$ obtendremos

$$T(\Theta) = A + B\Theta, \tag{2}$$

$$Q(r) = C + D \ln r. \tag{3}$$

Pero, si $k > 0$, entonces

$$T(\Theta) = A \cos k\Theta = B \operatorname{sen} k\Theta, \tag{4}$$

y la solución de la segunda ecuación la buscaremos en la forma $Q(r) = r^m$ lo que da $r^2 m (m-1) r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0$, o bien $r^m (m^2 - k^2) = 0$, o sea, $m = \pm k$.

Por consiguiente,

$$Q(r) = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{5}$$

Notemos que $u(r, \theta)$, en tanto función de θ, es una función periódica con período 2π, ya que para una función unívoca las magnitudes $u(r, \theta)$ y $u(r, \theta + 2\pi)$ coinciden. Por eso de la igualdad (1) resulta que $B=0$ y en la igualdad (4) k puede tomar uno de los valores 1, 2, 3, . . . ($k > 0$). Luego, en las igualdades (3) y (5) debe ser $D = 0$, ya que en caso contrario la función tendría una discontinuidad en el punto $r = 0$ y no sería armónica en el círculo. De suerte que hemos obtenido un conjunto innumerable de soluciones parciales de la ecuación (1) que son continuas en el círculo y que pueden ser escritas (cambiando en cierto grado las designaciones) en la forma

$u_0(r, \theta) = A_0/2$; $\quad u_n(r, \theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)\, r^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Escribimos ahora la función

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)\, r^n$$

la cual, debido a la linealidad y homogeneidad de la ecuación de Lampace también sirve de solución de ella. Queda por determinar las magnitudes A_0, A_n, B_n, de modo que esta función satisfaga la condición $u \mid_{r=R} = f(\theta)$, o sea,

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)\, R^n.$$

Aquí tenemos el desarrollo de la función $f(\Theta)$ en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$. En virtud de las fórmulas conocidas encontramos

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, d\tau, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau\, d\tau,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \operatorname{sen} n\tau\, d\tau.$$

De este modo,

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cdot \cos n(\tau - \Theta) \right] dt.$$

Simplificamos el resultado obtenido. Haciendo $r/R = \rho$, $\tau - \Theta = t$, representamos la expresión puesta entre corchetes en la forma

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos nt = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt - \frac{1}{2}.$$

Examinamos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\rho e^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt + i \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen} nt.$$

Esta serie converge para $\rho < 1$ y su suma es igual a

$$\frac{1}{1 - \rho e^{it}} = \frac{1}{1 - \rho \cos t - i\rho \operatorname{sen} t} = \frac{1 - \rho \cos t + i\rho \operatorname{sen} t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt-\frac{1}{2}=\frac{1-\rho\cos t}{1-2\rho\cos t+\rho^2}-\frac{1}{2}=\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)},$$

o bien, retornando a designaciones anteriores, nos queda

$$u(r,\ \Theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\Theta)+r^2}\,d\tau.$$

Hemos obtenido la solución del problema de Dirichlet para el círculo. La integral que está en el segundo miembro se llama integral de Poisson.

948. Hallar la distribución estacionaria de la temperatura sobre una placa homogénea redonda fina, de radio R, cuya mitad superior se mantiene a la temperatura de 1° y la inferior, a la de 0°.

Resolución. Si $-\pi<\tau<0$, entonces $f(\tau)=0$ y si $0<\tau<\pi$, $f(\tau)=1$. La distribución de la temperatura se expresa por la integral

$$u(r,\ \Theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\Theta)+r^2}\,d\tau.$$

Supongamos que el punto $(r;\Theta)$ está en el semicírculo superior, o sea, $0<<\Theta<\pi$; entonces $\tau-\Theta$ varía de $-\Theta$ a $\pi-\Theta$ y este intervalo, de longitud π, no contiene los puntos $\pm\pi$. Por eso efectuemos la sustitución $\operatorname{tg}\frac{\tau-\Theta}{2}=t$, de donde $\cos(\tau-\Theta)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\tau=\frac{2dt}{1+t^2}$. Entonces obtenemos

$$u(r,\ \Theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\operatorname{tg}(\Theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\Theta/2)}\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2+(R+r)^2\cdot t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\cdot t\right)\Bigg|_{-\operatorname{tg}(\Theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\Theta/2)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)}{1-\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2}=-\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta},$$

o bien,

$$\operatorname{tg}(u\pi)=-\frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta}.$$

Como el segundo miembro es negativo, esto quiere decir que para $0<\Theta<\pi$ u satisface las desigualdades $1/2<u<1$. Para este caso obtenemos la solución

$$\operatorname{tg}(\pi-u\pi)=\frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta},\ \text{ o bien }\ u=1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta}\quad(0<\Theta<\pi).$$

Pero, si el punto se halla en el semicírculo inferior, o sea, $\pi < \Theta < 2\pi$, entonces el intervalo $]-\Theta, \pi-\Theta[$ de variación de $\tau - \Theta$ contiene el punto $-\pi$, pero no contiene el 0 y podemos efectuar la sustitución $\operatorname{ctg} \frac{\tau-\Theta}{2} = t$, de donde $\cos(\tau-\Theta) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $d\tau = -\frac{2dt}{1+t^2}$. Entonces para estos valores de Θ tenemos

$$u(r, \Theta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{ctg}(\Theta/2)}^{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \frac{R^2-r^2}{(R+r)^2+(R-r^2)\,t^2}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} \frac{R-r}{R+r} \cdot \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)\Bigg].$$

Realizando transformaciones análogas, encontramos

$$u = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2-r^2}{2Rr \operatorname{sen} \Theta} \quad (\pi < \Theta < 2\pi).$$

Puesto que ahora el segundo miembro es positivo ($\operatorname{sen} \Theta < 0$), entonces $0 < u < 1/2$.

949. Hallar la solución de Laplace para la parte interior del anillo $1 \leqslant r \leqslant 2$ de modo que satisfaga las condiciones de contorno $u\,|_{r=1} = 0$, $u\,|_{r=2} = y$.

Indicación. Introducir las coordenadas polares.

Capítulo VII. Elementos de la teoría de las funciones de variable compleja

§ 1. Funciones de variable compleja

Supongamos que una variable compleja $z = x + yi$ toma todos los valores posibles de cierto conjunto Z. Si a cada valor de z del conjunto Z se la puede poner en correspondencia uno o varios valores de otra variable compleja $w = u + vi$, entonces la variable compleja w se llama *función* de z en la región Z y se escribe $w = f(z)$.

La función $w = f(z)$ se llama *uniforme* (unívoca) si a cada valor de z del conjunto Z se le puede poner en correspondencia un solo valor de w. Pero si existen valores de z a cada uno de los cuales se le pueden poner en correspondencia varios valores de w, entonces la función $w = f(z)$ se denomina *multiforme*.

Si $w = u + vi$ es función de $z = x + yi$, entonces cada una de las variables u y v es función de x e y, o sea, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Al contrario, si $w = u(x, y) + v(x, y)i$, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones reales de x e y, entonces w se puede considerar como función de la variable compleja $z = x + yi$. En efecto, cada número complejo $z = x + yi$ tiene en correspondencia cierto par de números reales $(x; y)$ y a este par de números le corresponde uno o varios valores de w.

Se dice que la función uniforme $w = f(z)$ para $z \to c$ tiene un *límite* determinado C (c y C son números complejos) si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal, que de la desigualdad $|z - c| < \delta$ resulte la desigualdad $|f(z) - C| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{z \to c} f(z) = C$.

La función $w = f(z)$ se llama *continua en el punto* z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

La función que es continua en cada punto de cierta región D se denomina *continua* en esta región.

Examinemos una región D limitada por una línea cerrada no nodal Γ. Esta región se dice *simplemente conexa* (fig. 60).

Si una región D está limitada por dos líneas cerradas, disjuntas y no nodales, Γ_1 y Γ_2, ella se dice *doblemente conexa* (fig. 61).

Sea Γ_1 la línea exterior y Γ_2 la línea interior. La región es doblemente conexa también en el caso en que la línea Γ_2 degenere en punto o en arco de una línea continua. Análogamente, pueden ser definidas regiones triplemente conexas y cuádruplemente conexas, etc. En la fig. 62 se muestra una región cuádruplemente conexa.

Las funciones de variable compleja e^z, sen z, cos z, sh z, ch z se definen como sumas de las siguientes series que convergen en todo el plano de la variable compleja:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots;$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots;$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots.$$

Para las funciones de variable compleja es válida *la fórmula de Euler*:

$$e^{zi} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

De esta fórmula resulta que

$$\operatorname{sh} zi = i \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{ch} zi = \cos z.$$

Las fórmulas que se conocen de las matemáticas elementales

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 - z_2},$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

son justas también para los valores complejos de los argumentos z_1 y z_2.

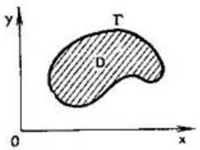

Fig. 60

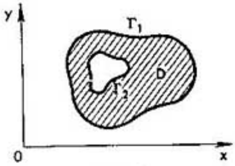

Fig. 61

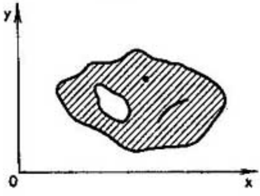

Fig. 62

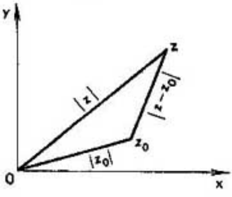

Fig. 63

Las funciones $z^{1/n}$ $(n \in N)$, $\ln z$, $\arcsen z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ se definen como inversas con respecto a las funciones correspondientes z^n, e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$,

$\operatorname{tg} z = \operatorname{sen} z/\cos z$. Con ello las funciones $z^{1/n}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{arcsen} z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ son multiformes.

Se puede mostrar que

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} \rho + (\varphi + 2k\pi) i \quad (k \in Z),$$

donde $\rho = |z|$ y $\varphi = \arg z$.

950. Se da la función $w = z^2 + z$. Hallar los valores de la función si: 1) $z = 1 + i$; 2) $z = 2 - i$; 3) $z = i$; 4) $z = -1$.

Resolución. Tenemos
1) $w = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i$;
2) $w = (2 - i)^2 + 2 - i = 4 - 4i - 1 + 2 - i = 5\ (1 - i)$;
3) $w = i^2 + i = -1 + i$;
4) $w = 1 - 1 = 0$.

951. Se da la función $f(z) = x^2 + y^2 i$, donde $z = x + yi$. Hallar: 1) $f(1 + 2i)$; 2) $f(2-3i)$; 3) $f(0)$; 4) $f(-i)$.

Resolución. Tenemos
1) $x = 1$, $y = 2$, $f(1 + 2i) = 1 + 4i$;
2) $x = 2$, $y = -3$, $f(2 - 3i) = 4 + 9i$;
3) $x = 0$, $y = 0$, $f(0) = 0 + 0 \cdot i = 0$;
4) $x = 0$, $y = -1$, $f(-i) = i$.

952. Mostrar que la función $w = |z|$ es continua para un valor cualquiera de z.

Resolución. Como la diferencia de dos lados de un triángulo no es mayor que el tercer lado, entonces

$$||z| - |z_0|| \leqslant |z - z_0|$$

(fig. 63). Sea $0 < \delta < \varepsilon$. Entonces, de la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ resulta la desigualdad $||z| - |z_0|| < \varepsilon$, o sea, $\lim\limits_{z \to z_0} |z| = |z_0|$. De este modo, $|z|$ es una función continua.

953. Mostrar que $w = z^2$ es continua para un valor cualquiera de z.

Resolución. Tenemos $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Si $z \to z_0$, entonces existe un número positivo M tal, que se cumplan las desigualdades $|z| < M$, $|z_0| < M$. Pero

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| < |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < \\ < 2M\,|z - z_0|.$$

Tomamos $\delta < \varepsilon/(2M)$. De la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ se deduce que

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta < 2M \cdot \varepsilon/(2M), \text{ o sea, } |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

De suerte que $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, o sea, $w = z^2$ es una función continua

954. Hallar $\ln (\sqrt{3} + i)$.

Resolución. Tenemos $z = \sqrt{3} + i$, $\rho = |z| = 2$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} (1/\sqrt{3}) = \pi/6$, o sea, $\ln (\sqrt{3} + i) = \ln 2 + (\pi/6 + 2k\pi) i$, $k \in Z$.

955. Calcular $\cos(i/2)$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Puesto que

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

hallamos

$$\cos\frac{i}{2} = 1 + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{6!2^6} + \ldots = 1{,}1276.$$

956. Se da la función $w = e^z$. Hallar su valor: 1) para $z = \pi i/2$; 2) para $z = \pi(1 - i)$; 3) para $z = 1 + (\pi/2 + 2\pi k)i$, donde $k \in \mathbf{Z}$.

957. Se da la función $f(z) = 1/(x - yi)$, donde $z = x + yi$. Hallar $f(1 + i)$, $f(i)$, $f(3 - 2i)$.

958. Mostrar que $\omega = 2z^3$ se una función continua.

959. Hallar $\ln(1 - i)$.

960. Mostrar la validez de la igualdad $\operatorname{sen} i \cdot \operatorname{ch} 1 = i \cos i \cdot \operatorname{sh} 1$.

961. Resolver la ecuación $\cos z = 2$.

962. Hallar $\operatorname{arcsen} i$.

963. Determinar $\operatorname{sen} i$, caculando la parte real y la parte imaginaria con precisión de hasta 0,0001.

964. ¿A qué es igual $\operatorname{sen}(\pi/6 + i)$? Calcular la parte real y la parte imaginaria con precisión de hasta 0,001.

965. Se da la función $f(z) = e^{e^z}$. Hallar sus valores en los puntos: 1) $z = i$; 2) $z = 1 + \pi i/2$.

§ 2. Derivada de una función de variable compleja

Se llama *derivada* de una función uniforme de variable compleja $w = f(z)$ al límite de la relación $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ si Δz, de cualquier modo, tiende a cero.

De este modo,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

La función que tiene una derivada para tal valor de z se llama *derivable* (o *monógena*) para este valor de z. Si la función $w = f(z)$ es uniforme y tiene una derivada finita en cada punto de la región D, entonces esta función se denomina *analítica* en la región D.

Si la función $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en el punto $z = x + yi$, entonces en este punto existen las derivadas parciales $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$, además, estas derivadas están vinculadas por las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

llamadas *condiciones de Cauchy—Riemann.*

Las condiciones de Cauchy—Riemann son condiciones *necesarias* de derivabilidad de la función $w = f(z)$ en el punto $z = x + yi$.

Inversamente, si las derivadas parciales $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$ son continuas en el punto $z = x + yi$ y las condiciones de Cauchy—Riemann $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$ se cumplen, entonces la función $w = f(z)$ es derivable en el punto $z = x + yi$.

La derivada de la función $f(z)$ se expresa por las derivadas parciales de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con ayuda de las fórmulas

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Las derivadas de las funciones elementales z^n, e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\ln z$, $\operatorname{arcsen} z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, se determinan por las mismas fórmulas que para el argumento real:

$$\begin{aligned} &(z^n)' = n \cdot z^{n-1} && (\operatorname{arcsen} z)' = 1/\sqrt{1-z^2}, \\ &(e^z)' = e^z, && (\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2}, \\ &(\cos z)' = -\operatorname{sen} z, && (\operatorname{arctg} z)' = 1/(1+z^2), \\ &(\operatorname{sen} z') = \cos z && (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \\ &(\ln z)/ = 1/z, && (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

966. ¿Es derivable la función $f(z) = y + xi$?

Resolución. Encontramos

$$u = y, \quad v = x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Una de las condiciones de Cauchy—Riemann no se cumple. Por lo tanto, la función dada no es derivable.

967. ¿Es derivable la función $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$?

Resolución. Tenemos

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Las condiciones de Cauchy—Riemann se cumplen. Por consiguiente, la función es derivable. Puesto que $f'(z) = \frac{du}{dx} + i \cdot \frac{dy}{dx}$, entonces

$$f'(z) = 2x + 2yi = 2(x + yi) = 2z.$$

La derivada $f'(z)$ puede ser determinada también de este otro modo:

$$f(z) = (x + yi)^2 = z^2, \quad f'(z) = 2z.$$

968. ¿Es derivable la función $f(z) = e^x \cos y + i \cdot e^x \operatorname{sen} y$?

Resolución. Hallamos

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \operatorname{sen} y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Las condiciones de Cauchy—Riemann se cumplen. Luego tenemos

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)=$$

$$e^x\cdot e^{yi}=e^{x+yi}=e^z,$$

o, de otro modo,

$$f(z)=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)=e^xe^{yi}=e^{x+yi}=e^z,\quad f'(z)=e^z.$$

969. Se da la parte real $u(x, y)=x^2-y^2-x$ de la función derivable $f(z)$, donde $z=x+yi$. Hallar la función $f(z)$.

Resolución. Encontramos $\frac{du}{dx}=2x-1$. Como $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}$ (en virtud de una de las condiciones de Cauchy—Riemann), entonces $\frac{dv}{dy}=2x-1$. Integrando, hallamos

$$v(x, y)=2xy-y+\varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función arbitraria.

Utilizamos otra condición de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Puesto que $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)$, entonces $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-\varphi'(x)$.

Pero de los datos del problema hallamos que $\frac{du}{dy}=-2y$. Por consiguiente,

$$-2y-\varphi'(x)=-2y,\quad \varphi'(x)=0,\quad \varphi(x)=C,$$

de donde

$$f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y+C)=x^2-y^2+2xyi-(x+yi)+Ci,$$

o bien

$$f(z)=(x+yi)^2-(x+yi)+Ci,\ \text{o sea},\ f(z)=z^2-z+C_1.$$

970. Se da la parte imaginaria $v(x, y)=x+y$ de la función derivable $f(z)$. Hallar esta función.

Resolución. Tenemos $\frac{\partial v}{\partial y}=1$; por consiguiente, $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ (de acuerdo con la condición de Cauchy-Riemann). Por eso

$$u=x+\varphi(y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y),\quad \frac{\partial v}{\partial x}=1.$$

Pero $\frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$. Por lo tanto, $\varphi'(y)=-1$. Integrando, encontramos que $\varphi(y)=-y+C$. De aquí $u=x-y+C$. Así, pues,

$$f(z)=x-y+C+i(x+y)=(1+i)(x+yi)+C,\ \text{o sea},\ f(z)=$$

$$=(1+i)z+C.$$

971. ¿Es derivable la función $f(z)=(x^2+y^2)-2xyi$?

972. Mostrar que la función $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ es derivable y encontrar su derivada.

973. ¿Es derivable la función $f(z)=\operatorname{sen} x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$? Si lo es, hallar su derivada.

974. Determinar las funciones reales $\varphi(y)$ y $\psi(x)$ de modo que la función $f(z) = \varphi(y) + i\psi(x)$ sea derivable.

975. ¿Para que valor de λ la función $f(z) = y + \lambda xi$ es derivable?

976. ¿Para qué valor de a la función $f(z) = a\bar{z}$ (donde $\bar{z} = x - yi$) es derivable?

977. Se da la parte real $u = 2^x \cos(y \ln 2)$ de la función derivable $f(z)$. Hallar esta función.

978. Se da la parte imaginaria $v = \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$ de la función derivable $f(z)$. Hallar esta función.

§ 3. Concepto de aplicación conforme

Supongamos que se da la función $w = f(z)$, analítica en la región D. Fijamos cierto valor de $z = x + yi$. A este valor de z la corresponde un valor determinado de $w = u + vi$. De suerte que a cada punto $(x; y)$ sobre el plano xOy le corresponde un punto determinado (u, v) sobre el plano uOv.

Si el punto (x, y) sobre el plano xOy describe cierta línea Γ situada en la región D, entonces el punto $(u; v)$ sobre el plano uOv describirá la línea Γ'. A la

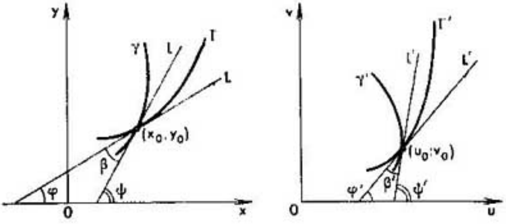

Fig. 64

línea Γ' la llamamos *aplicación* de la línea Γ sobre el plano uOv, por medio de la función analítica $w = f(z)$.

Tomamos sobre la línea Γ el punto $z_0 = x_0 + y_0i$. A este punto le corresponde el punto $w_0 = u_0 + v_0i$ sobre la línea Γ'. Trazamos la tangente L a la línea Γ en el punto (x_0, y_0) y la tangente L' a la línea Γ' en el punto $(u_0; v_0)$. Sea α el ángulo en que hace falta girar la recta L para que su dirección coincida con la de la recta L' (el ángulo comprendido entre la dirección inicial y la aplicada). En la teoría de las funciones analíticas se demuestra que $\alpha = \arg f'(z_0)$ si $f'(z_0) \neq 0$.

Examinemos otra línea γ que también pasa por el punto $(x_0; y_0)$ y su aplicación, o sea, la línea γ' que pasa por el punto $(u_0; v_0)$. Sea l la tangente a γ en el punto (x_0, y_0) y l' la tangente a γ' en el punto $(u_0; v_0)$.

Para que la dirección de la recta l coincida con la de la l', también en este caso hace falta girar la recta l en un ángulo α, ya que el ángulo de rotación es igual a $f'(z_0)$ [el valor de la derivada no depende de la selección de una curva que pase por el punto $(x_0; y_0)$; fig. 64].

Si φ y ψ son los ángulos que forman las tangentes L y l con el eje Ox, y φ' y ψ' los ángulos que forman las tangentes L' y l' con el eje Ou, entonces $\varphi' - \varphi = \alpha$, $\psi' - \psi = \alpha$ y $\varphi' - \varphi = \psi' - \psi$. Por consiguiente, $\psi - \varphi = \psi' - \varphi'$. Pero $\psi - \varphi$ es el ángulo comprendido entre las tangentes L y l y $\psi' - \varphi'$ es el ángulo comprendido entre las tangentes L' y l'. De este modo, dos líneas arbitrarias que se intersecan en el punto (x_0, y_0) se aplican formando dos líneas respectivas que se cortan en el punto $(u_0; v_0)$ de modo que el ángulo β comprendido entre las tangentes a las líneas dadas y a las aplicadas sea el mismo.

Se demuestra fácilmente que el módulo de la derivada en el punto $(x_0; y_0)$, o sea $|f'(z_0)|$ expresa el límite de la relación de las distancias comprendidas entre los puntos aplicados $w_0 + \Delta w_0$ y w_0 y los puntos iniciales $z_0 + \Delta z_0$ y z_0 (fig. 65).

Examinando otra curva y su aplicación, llegamos a la conclusión de que $|f'(z_0)|$ expresa el límite de relación de las distancias comprendidas entre los puntos aplicados $w_0 + \Delta' w_0$ y w_0 y los puntos iniciales $z_0 + \Delta' z_0$ y z_0.

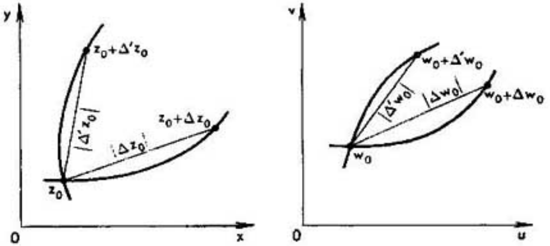

Fig. 65

Así que $|f'(z_0)|$ es la magnitud de distorsión de la escala en el punto z_0 al efectuar la aplicación con ayuda de la función $w = f(z)$.

Por lo tanto, si un triángulo infinitamente pequeño en el plano xOy se aplica con ayuda de la función $w = f(z)$ sobre el plano uOv, se obtiene un triángulo curvilíneo infinitamente pequeño que es semejante al inicial debido a la igualdad de los ángulos correspondientes y la proporcionalidad de los lados homólogos (en el límite).

La aplicación con ayuda de la función analítica $w = f(z)$ se llama *aplicación conforme*.

979. Con ayuda de la función $w = 1/z$ aplicar sobre el plano uov los puntos: 1) (1; 1); 2) (0; —2); 3) (2; 0).

Resolución. 1) Al punto (1; 1) le corresponde el valor de $z = 1 + i$; por consiguiente,

$$w=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Sobre el plano uOv obtendremos el punto (1/2; —1/2);
2) $z = -2i$, $w = 1/(-2i) = (1/2)i$; obtendremos el punto (0; 1/2);
3) $z = 2$, $w = 1/2$; obtendremos el punto (1/2; 0).

980. Con ayuda de la función $w = z^3$ aplicar sobre el plano uOv la línea $y = x$.

Resolución. Tenemos

$w = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)$.
De este modo,

$$u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3.$$

De las ecuaciones obtenidas y de la ecuación $y = x$ se eliminan x e y:

$$u = -2x^3, \qquad v = 2x^3, \qquad \text{o sea,} \qquad v = -u.$$

Por lo tanto, de aplicación de la bisectriz de los ángulos de las coordenadas I y III del sistema xOy sirve la bisectriz de los ángulos de las coordenadas II y IV del sistema uOv.

981. Sea $w = z^2$ y que z describe el cuadrado que es definido por las desigualdades $0 \leqslant z \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. ¿Qué región describe w?

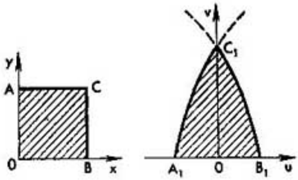

Fig. 66

Resolución. Tenemos

$= (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$

$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$

Hallamos las aplicaciones de los vértices (fig. 66). Si $x = 0$, $y = 0$, entonces $u = 0$, $v = 0$; si $x = 0$, $y = 1$, entonces $u = -1$, $v = 0$; si $x = 1$, $y = 0$, entonces $u = 1$, $v = 0$; si $x = 1$, $y = 1$, entonces $u = 0$, $v = 2$.

Hallamos las aplicaciones de los lados del cuadrado.

OB: $y = 0$, $u = x^2$, $v = 0$, o sea, $v = 0$, $u \geqslant 0$, es el segmento OB_1 del eje de abscisas Ou.

OA: $x = 0$, $u = -y^2$, $v = 0$, o sea, $v = 0$, $u \leqslant 0$, es el segmento OA_1 del eje de abscisas Ou.

AC: $y = 1$, $u = x^2 - 1$, $v = 2x$; eliminando x, obtenemos $u = v^2/4-1$, o sea, el arco de la parábola que une los puntos A_1 $(-1; 0)$ y C_1 $(0; 2)$.

BC: $x = 1$, $u = 1 - y^2$, $v = 2y$; eliminado y, obtenemos $u = 1 - v^2/4$, o sea, el arco de la parábola que une los puntos B_1 $(1; 0)$ y C_1 $(0; 2)$.

Así, pues, de aplicación del cuadrado sirve el triángulo curvilíneo limitado por las líneas $v = 0$, $u = v^2/4 - 1$, $u = 1 - v^2/4$ y situado en el semiplano superior.

982. Con ayuda de la función $w = 2z + 1$ hallar la aplicación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ sobre el plano uOv.

Resolución. Tenemos

$$w = 2(x + yi) + 1 = (2x + 1) + 2yi,$$

de donde $u = 2x + 1$, $v = 2y$. De estas dos igualdades hallamos $x = (u - 1)/2$ e $y = v/2$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la circunferencia, obtendremos

$$(u - 1)^2 + v^2 = 4.$$

De suerte que la aplicación buscada es una circunferencia con radio igual a 2 y centro en el punto O $(1; 0)$.

983. Con yuda de la función $w = z^2$ aplicar sobre el plano uOv las rectas $x = 2$ e $y = 1$.

984. Con ayuda de la función $w = -z^2$ aplicar sobre el plano uOv la recta $x + y = 1$.

985. Con ayuda de la función $w = iz + 1$ hallar las aplicaciones de los ejes de las coordenadas sobre el plano uOv.

986. Explicar el sentido de la aplicación sobre el plano uOv por medio de la función $w = e^{\varphi i}z$, donde φ es constante.

987. Se da la parábola $y = x^2$. Aplicar esta parábola sobre el plano uOv por medio de la función $w = z^2$.

988. Mostrar que el ángulo formado entre las rectas $y = 1$ e $y = x - 1$ no varía después de la aplicación $w = (1 + i)z + (1 - i)$.

§ 4. Integral de derivable compleja

Como es sabido, la curva Γ se llama *suave* si tiene una tangente de variación continua.

Una curva se denomina *suave a trozos* si está compuesta por un número finito de arcos suaves.

Se da la función de variable compleja $w = f(z)$ que es continua en cierta región D. Sea Γ una curva suave arbitraria ubicada en la región D. Examinemos un arco de una curva que tenga por origen el punto z_0 y por extremo el punto z. Dividimos este arco en n partes con los puntos arbitrarios $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = z$ situados sucesivamente sobre la línea Γ.

Escribimos la suma

$$S_n = f(z_0)\,\Delta z_0 + f(z_1)\,\Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1})\,\Delta z_{n-1},$$

donde $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Sea λ la mayor entre las magnitudes $|\Delta z_k|$. Si $\lambda \to 0$, entonces $n \to \infty$ y la suma S_n tiende a cierto límite. Este límite ha recibido el nombre de *integral* de la función $f(z)$ sobre el arco de la curva Γ, comprendido entre los puntos z_0 y z, o sea,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\,[f(z_0)\,\Delta z_0 + f(z_1)\,\Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1})\,\Delta z_{n-1}].$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la integral $\int_\Gamma f(z)\,dz$ se reduce a dos integrales curvilíneas de las funciones reales con ayuda de la fórmula

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_\Gamma v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy.$$

Sea Γ una línea suave a trozos constituida por las partes suaves $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$; entonces la integral sobre esta línea se puede determinar valiéndose de la igualdad

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\Gamma_m} f(z)\,dz.$$

Si $f(z)$ es una función analítica en una región D simplemente conexa, el valor de la integral $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ tomada a lo largo de una línea arbitraria Γ suave a trozos, perteneciente a la región D, no depende de la línea Γ y se determina solamente por las posiciones de los puntos inicial y final de esta línea.

Para toda función analítica $f(z)$ en cierta región D simplemente conexa la integral $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ tomada sobre cualquier contorno cerrado γ, suave a trozos, que esté en la región D es igual a cero (Teorema de Cauchy).

Examinemos la expresión $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$. Aquí por camino de integración se toma una línea arbitraria Γ, suave a trozos, que está en la región D y une los puntos z_0 y z. Se supone que la función $f(t)$ es analítica en la región D. Se puede mostrar fácilmente que $F'(z) = f(z)$. La función $F(z)$, cuya derivada es igual a $f(z)$, se llama función *primitiva* con respecto a la función $f(z)$. Si es conocida una de las funciones primitivas $F(z)$, entonces todas otras funciones primitivas se contienen en la expresión $F(z) + C$, donde C es una constante arbitraria. Esta expresión $F(z) + C$ se denomina *integral indefinida* de la función $f(z)$. Al igual que para las funciones reales, aquí se cumple la igualdad

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

(fórmula de Newton—Leibniz), donde $\Phi(z)$ es una función primitiva cualquiera con respecto a $f(z)$.

Cara hallar una función primitiva con respecto a una función analítica $f(z)$ se aplican las fórmulas ordinarias de integración.

Examinemos $n + 1$ líneas cerradas suaves a trozos $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, tales que cada una de las líneas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ esté fuera de las demás y todas ellas se encuentren dentro de γ_0. El conjunto de puntos que estén simultáneamente dentro de γ_0 y fuera de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ es una región D de conexión múltiple $(n + 1)$.

Sea $f(z)$ una función analítica en la región D (incluyendo los valores sobre los contornos $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$). En este caso se cumple la igualdad

$$\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

989. Calcular la integral a $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$, donde $f(z) = (y + 1) - xi$, AB es el segmento de la recta que une los puntos $z_A = 1$ y $z_B = -i$

Resolución. Tenemos $u = y + 1$, $v = -x$. De aquí,

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} (y+1)\,dx + x\,dy - i \int\limits_{AB} x\,dx - (y+1)\,dy =$$
$$= (y+1)\cdot x \Big|_{x=1,\ y=0}^{x=0,\ y=-1} - i\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^0 + i\cdot \frac{(y+1)^2}{2}\Big|_0^{-1} =$$
$$= -1 + \frac{1}{2}\,i - \frac{1}{2}\,i = - \quad .$$

Se puede proceder también de otro modo. Es fácil ver que $f(z) = 1 - iz$ y que

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_1^{-i} (1-iz)\,dz = \frac{(1-iz)^2}{-2i}\Big|_1^{-i} = \frac{(1+i^2)^2}{-2i} + $$
$$+\frac{(1-i)^2}{2i} = \frac{1-2i+i^2}{2i} = -1.$$

989a. Hallar el ángulo de rotación y la razón de aplicación en el punto $z = -2i$ para la aplicación $W = \frac{(z+i)^2}{z-i}$.

Resolución. Como el ángulo de rotación y la razón de aplicación se encuentran por la derivada en el punto dada, derivamos la función dada.

$$W' = \frac{2(z+i)(z-i)-(z+i)^2}{(z-i)^2} = \frac{4+(z-i)^2}{(z-i)^2}.$$

En el punto $z_0 = -2i$: $\alpha = \arg\left[\frac{4+(z-i)^2}{(z-i)^2}\right] = \arg\left(\frac{5}{9}\right) = 0.$

$$K = \left|\frac{4+(z-i)^2}{(z-i)^2}\right| = \frac{5}{9} < \text{(contracción)}.$$

990. Calcular la integral $\int_{AB} f(z)\,dz$, donde $f(z) = x^2 + y^2 i$, AB es el segmento de la recta que une los puntos $A\ (1+i)$ y $B\ (2+ +3i)$.

Resolución. Tenemos $u = x^2$, $v = y^2$; de suerte que

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} x^2\,dx - y^2\,dy + i\int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy.$$

Puesto que la expresión $x^2\,dx - y^2\,dy$ es la diferencial total, la primera entre las integrales en el segundo miembro de la igualdad se calcula como la integral definida

$$\int_{AB} x^2\,dx - y^2\,dy = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^3 y^2\,dy = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{y^3}{3}\Big|_1^3 =$$
$$= \frac{7}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{19}{3}.$$

Para calcular la segunda integral escribimos la ecuación de la recta AB:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{2-1}, \quad \text{o sea,} \quad y = 2x-1.$$

De donde $dy = 2\,dx$, y

$$\int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_1^2 [(2x-1)^2 + 2x^2]\,dx = \int_1^2 (6x^2-4x+1)\,dx =$$
$$= (2x^3-2x^2+x)\,\Big|_1^2 = 10-1 = 9.$$

Por consiguiente, $\int_{AB} f(z)\,dz = -\frac{19}{3} + 9i.$

990a. ¿En qué puntos del plano el ángulo de rotación de la aplicación $W = \frac{1+iz}{1-iz}$ es igual a cero? ¿En qué puntos el coeficiente de estiramiento es igual a 1?

Resolución. El enunciado del problema supone, ante todo, la determinación de tales puntos, en los cuales la aplicación dada es conforme, ya que sólo en estas condiciones se puede hablar del ángulo de rotación y del coeficiente de estiramiento. Hallamos

$$W' = \frac{i(1-iz)+i(1+iz)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2} = -\frac{2i}{(z+i)^2}.$$

Puesto que $W'(z) \neq 0$ para ningún valor de z, entonces la aplicación dada es conforme en todo el plano con el punto sacado $z = -i$. El ángulo de rotación α de esta aplicación en el punto z será

$$\alpha = \arg W'(z) = \arg\left[\frac{-2i}{(z+i)^2}\right] = \arg \frac{-4x(y+1)-2i\,[x^2-(y+2)^2]}{[x^2+(y+1)^2]^2}.$$

El número $W'(z)$ será real si $\operatorname{Im} W'(z) = 0$ y positivo si, además, $\operatorname{Re} W'(z) > 0$, o sea,

$$\begin{cases} \operatorname{Im} W'(z) = x^2-(y+1)^2 = 0 \\ \operatorname{Re} W'(z) = -4x(y+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2 = x^2 \\ x(y+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x-1 \ (x \neq 0).$$

De suerte que el ángulo de rotación de la aplicación dada es igual a cero en los puntos de la recta $y = -x-1$ (con el punto sacado $z = -i$). El coeficiente de estiramiento en el punto z es igual a $k = W'(z)$; según el enunciado del problema este coeficiente debe igualarse a la unidad y, por consiguiente,

$$|W'(z)| = \left|\frac{-2i}{(z+i)^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |(z+i)^2| = 2 \Leftrightarrow |z+i| = \sqrt{2},$$

es decir, la ecuación de la circunferencia en la forma compleja con centro en el punto $z = -i$ y radio $\sqrt{2}$.

991. Calcular la integral $\int\limits_i^{1+i} z\,dz$.

Resolución. La función subintegral es analítica. Utilizando la fórmula de Newton—Leibniz, obtenemos

$$\int\limits_i^{1+i} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_i^{1+i} = \frac{1}{2}\,[(1+i)^2-i^2] = \frac{1}{2}(1+2i-1+1) = \frac{1}{2}+i.$$

992. Calcular $\int\limits_\gamma \bar{z}\,dz$, donde γ es un contorno cerrado, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.

Resolución. Puesto que $\bar{z} = x - yi$, $dz = dx + i\,dy$, entonces

$$\int\limits_\gamma \bar{z}\,dz = \int\limits_\gamma x\,dx + y\,dy + i\int\limits_\gamma x\,dy - y\,dx.$$

La primera integral del segundo miembro es igual a cero como integral de la diferencial total sobre un contorno cerrado.

Al calcular la segunda integral hay que tener en cuenta que $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$. De aquí, $x\, dy - y\, dx = \cos^2 t\, dt + \operatorname{sen}^2 t\, dt = dt$; finalmente, obtenemos

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

993. Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z-4}$, donde γ es una elipse, $x = 3\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$.

Resolución. La función subintegral es analítica en la región limitada por esta elipse, por eso $\int_\gamma \frac{dz}{z-4} = 0$.

994. Calcular $\int_\gamma \frac{dt}{z-(1+i)}$, donde γ es la circunferencia $|z-(i+1)| = 1$.

Resolución. La ecuación de la circunferencia se puede escribir en la forma $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, o bien $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, o bien

$$z = 1 + i + e^{it}.$$

En la región limitada por la circunferencia γ la función subintegral no es analítica, ya que en el punto $z = 1 + i$ que sirve de centro de esta circunferencia la función se convierte en infinito.

Puesto que $dz = i \cdot e^{it}\, dt$, entonces

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-(1+i)} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\, dt}{e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

995. Calcular $\int_\gamma \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)} dz$, donde γ es la circunferencia $|z| = 2$.

Resolución. La función subintegral tiene discontinuidades sólo en los puntos $z = 1$ y $z = i$. La función $f(z)$ es analítica en la región triplemente conexa que no es más que un círculo con circunferencia de frontera γ, del cual están recortados dos círculos $|z-1| < r$, $|z-i| < r$, donde $r > 0$ es una magnitud suficientemente pequeña (fig. 67). Por consiguiente,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz,$$

donde γ_1 es la circunferencia $|z-1| = r$, γ_2 es la circunferencia $|z-i| = r$.

Puesto que

$$f(z) = \frac{z-1+z-i}{(z-1)(z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-1},$$

entonces,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-i} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-i} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1}.$$

Los sumandos primero y cuarto en el segundo miembro son iguales a cero, ya que las funciones subintegrales son analíticas en las regiones correspondientes.

Por consiguiente,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-i}.$$

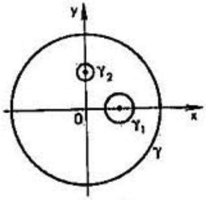

Fig. 67

La circunferencia γ_1 tiene la ecuación $z = 1 + re^{i\varphi}$, y la γ_2, la ecuación $z = i + re^{i\varphi}$. Por lo tanto,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi i} \frac{ire^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} + \int_0^{2\pi i} \frac{ire^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} = 4\pi i.$$

996. Calcular la integral $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ si $f(z) = y + xi$; Γ es la quebrada OAB con los vértices en los puntos $z_0 = 0$, $z_A = i$, $z_B = 1 + i$.

Hallar el ángulo de rotación y la razón de aplicación en el punto z_0 para la aplicación $W = f(z)$

996a. $W = z^3$, $z_0 = 1 - i$.

996b. $W = \frac{1}{z}$, $z_0 = 2i$.

996c. $W = u + iv$, donde $u = e^y \cos x$, $v = -e^y \operatorname{sen} x$, $z_0 = i$.

997. Calcular la integral $\int_{AB} z^2\,dz$ si AB es el segmento de la recta que una los puntos $z_A = 1$, $z_B = i$.

Hallar los puntos del plano en los cuales el coeficiente de estiramiento de las aplicaciones siguientes sea igual a 1.

997a. $W = z^2$.

997b. $W = z^2 - 2z$.

Hallar puntos del plano en los cuales el ángulo de rotación de las siguientes aplicaciones sea igual a cero

997c. $W = z^3$.

997d. $W = iz^2$.

998. Calcular la integral $\int_{\gamma} z^{10}\,dz$, donde γ es la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

999. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$, donde γ es la circunferencia $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$.

1000. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, donde γ es la circunferencia $z = e^{ti}$.

1001. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{(a+b)z - az_1 - az_2}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$, donde γ es el círculo $|z| \leqslant R$ y z_1 y z_2 son puntos interiores de este círculo, además, $z_1 \neq z_2$.

§ 5. Series de Taylor y de Laurent

Supongamos que se da una función $f(z)$, analítica en cierto entorno del punto a. Examinemos la serie

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\ldots .$$

Esta serie se llama *serie de Taylor* de la función $f(z)$ y dentro de su círculo de convergencia expresa la función $f(z)$, o sea, dentro del círculo de convergencia se cumple la igualdad

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots .$$

Si $a=0$, la última igualdad se escribe en la forma

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+\ldots .$$

En este caso se dice que la función $f(z)$ está desarrollada en *serie de Maclaurin*.

Examinemos ahora dos series:

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\ldots \qquad (1)$$

$$A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\ldots . \qquad (2)$$

La región de convergencia de la primera serie (si esta región existe) se define por la desigualdad $|z-a|>r$. Si existe la región de convergencia de la segunda serie, ella se define por la desigualdad $|z-a|<R$. Entonces, a condición de que $r<R$, para la serie

$$+\ldots\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-1}}{z-a}+$$
$$+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+$$
$$+A_3(z-a)^3+\ldots,$$

obtenida por la adición de las series (1) y (2), sirve de región de convergencia el anillo $r<|z-a|<R$ limitado por las circunferencias con centro en a y de radios r y R (fig. 68).

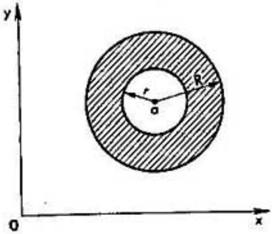

Fig. 68

Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en el anillo $r<|z-a|<R$. Esta función en el anillo indicado puede representarse en la forma de la suma de la serie

$$f(z)=\ldots+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-1}}{z-a}+$$
$$+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\ldots .$$

La serie en el segundo miembro se llama *serie de Laurent* de la función $f(z)$. Los coeficientes de esta serie se pueden calcular por la fórmula

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad (n\in \mathbf{Z}).$$

La serie (1) se denomina *parte principal* de la serie de Laurent y la serie (2), *parte regular* de la serie de Laurent.

Si la serie de Laurent contiene la parte principal, entonces a se llama *punto singular aislado*. En el caso en que la parte principal de la serie de Laurent contenga un número finito de términos, o sea, presente la forma

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_{-n}}{(z-a)^n} \quad (A_{-n}\neq 0),$$

el punto singular aislado a se denomina *polo de n-ésimo orden* de la función $f(z)$. En este caso el coeficiente A_{-1} ha recibido el nombre de *residuo* de la función $f(z)$, con respecto al polo a.

El punto singular $z=a$ se llama punto singular aislado de carácter unívoco, si alrededor de éste se puede circunscribir un círculo de radio suficientemente pequeño, o sea, tal que, una vez alejado su centro $z=a$, se obtenga una región doblemente conexa en la cual la función es analítica. Un punto singular aislado de caracter unívoco se denomina

a) *evitable*, si no existe la parte principal del desarrollo en serie de Laurent. Por ejemplo, para la función $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ el punto $z=0$ es un punto singular evitable, ya que

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots;$$

b) *polo*, si la parte principal contiene un número finito de términos. Por ejemplo, para la función $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ el punto $z=0$ sirve de polo de primer orden, puesto que

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\ldots;$$

c) *singular esencial*, si la parte principal contiene un número infinito de términos. Por ejemplo, la función $f(z)=e^{1/z}$ en el punto $z=0$ tiene un punto singular esencial, ya que

$$f(z)=e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$$

Entre el cero y el polo de la función existe la vinculación siguiente. Si $z=a$ es un cero de multiplicidad k de la función $f(z)$, entonces $z=a$ es polo del mismo orden de la función $1/f(z)$; inversamente, si $z=b$ es polo de orden k de la función $f(z)$, entonces $z=b$ es un cero de misma multiplicidad de la función $1/f(z)$.

Conviene señalar que si $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z)=c\neq 0$, entonces $z=a$ es polo de k-ésimo orden de la función $f(z)$.

1002. Desarrollar en serie de Taylor por potencias del binomio $z-i$ la función $f(z)=z^5$.

Resolución. Encontramos las derivadas de la función $f(z)=z^5$:

$$f'(z)=5z^4, \quad f''(z)=20z^3, \quad f'''(z)=60z^2,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(z)=120z, \quad f^{\mathrm{V}}(z)=120, \quad f^{\mathrm{VI}}(z)=f^{\mathrm{VII}}(z)=\ldots=0.$$

Determinamos los valores de las derivadas en el punto $a = i$:

$$f(i) = i, \quad f'(i) = 5, \quad f''(i) = -20i, \quad f'''(i) = -60,$$
$$f^{IV}(i) = 120i, \quad f^{V}(i) = 120.$$

Por lo tanto,

$$f(z) = i + 5(z-i) - 10i(z-i)^2 - 10(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5.$$

La serie de Taylor de la función $f(z) = z^5$ es un polinomio de quinto grado.

1003. Desarrollar en serie de Taylor por potencias del binomio $z - (1 - \pi i/2)$ la función $f(z) = \operatorname{ch}(1-z)$.

Resolución. Hallamos

$$\begin{aligned} &f(z) = \operatorname{ch}(1-z), && f(a) = \operatorname{ch}(\pi i/2) = \cos(\pi/4) = 0,\\ &f'(z) = -\operatorname{sh}(1-z), && f'(a) = -\operatorname{sh}(\pi i/2) = -i\operatorname{sen}(\pi/2) = -i,\\ &f''(z) = \operatorname{ch}(1-z), && f''(a) = 0,\\ &f'''(z) = -\operatorname{sh}(1-z), && f'''(a) = -i. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$f(z) = -i\left[\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right) + \frac{1}{3!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^5 + \ldots\right].$$

1004. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} + 1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \ldots$$

Resolución. Examinemos dos series

$$\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \ldots, \qquad \text{(a)}$$

$$1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \ldots. \qquad \text{(b)}$$

Si en la serie (a) se hace $z - 1 = 1/z'$, entonces se obtiene la serie de potencias

$$\frac{z'}{2} + \frac{z'^2}{2^2} + \frac{z'^3}{2^3} + \ldots. \qquad \text{(c)}$$

El radio de convergencia de la última serie se determina por el criterio de D'Alembert

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2^{n-1}}{1/2^n} = 2.$$

Por lo tanto, la serie de potencias (b) converge si $|z'| < 2$. Por consiguiente, la serie (a) converge si $|1/(z-1)| < 2$. De aquí obtenemos $|z-1| > 1/2$. Esto quiere decir que la serie (a) converge fuera del círculo de radio $r = 1/2$

con centro en el punto $z = 1$. Determinemos el radio de convergencia de la serie (b):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/5^{n-1}}{1/5^n} = 5.$$

De este modo, la región de convergencia de la serie (b) se define por la desigualdad $|z - 1| < 5$.

De lo dicho concluimos que el anillo $1/2 < |z - 1| < 5$ es la región de convergencia de la serie dada.

La resolución de este problema se puede simplificar. Las series (a) y (b) son progresiones geométricas con denominadores $\frac{1}{2(z-1)}$ y $\frac{z-1}{5}$, respectivamente. Ellas convergen si $\left|\frac{1}{2(z-1)}\right| < 1$ y $\left|\frac{z-1}{5}\right| < 1$. Por lo tanto, $|z - 1| > 1/2$ y $|z - 1| < 5$. De suerte que la región de convergencia es el anillo definido por la desigualdad doble $1/2 < |z - 1| < 5$.

1005. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{(3+4i)^3}{z^3} + \frac{(3+4i)^2}{z^2} + \frac{3+4i}{z} + 1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \ldots$$

Resolución. Examinemos dos series

$$\frac{3+4i}{z} + \frac{(3+4i)^2}{z^2} + \frac{(3+4i)^3}{z^3} + \ldots; \qquad \text{(a)}$$

$$1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \ldots. \qquad \text{(b)}$$

Las series (a) y (b) son progresiones geométricas que tienen por denominadores $(3 + 4i)/z$ y z/i. Ellas convergen si $|(3 + 4i)/z| < 1$ y $|z|/i < 1$. Puesto que $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $|i| = 1$, entonces $5/|z| < 1$ y $|z| < 1$, o bien $|z| > 5$ y $|z| < 1$. Pero estas desigualdades son incompatibles, por consiguiente, la serie dada no converge en ningún punto del plano.

1006. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z) = 1/(2z - 5)$ en el entorno del punto $z = 0$.

Resolución. Representemos la función dada en la forma

$$f(z) = \frac{-1/5}{1 - 2z/5}.$$

En el entorno del punto $z = 0$ se cumple la desigualdad $|2z/5| < 1$, por eso la fracción $\frac{-1/5}{1-2z/5}$ se puede considerar como la suma de una progresión geométrica infinita decreciente cuyo primer término es $a - 1/5$ y su denominador $q = 2z/5$. De aquí obtenemos

$$f(z) = -\frac{1}{5}\,\frac{2z}{5^2}\,\frac{2^2z^2}{5^3} - \frac{2^3z^3}{5^4} - \ldots, \text{ o bien } f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}z^{n-1}}{5^n}.$$

Este desarrollo contiene solamente la parte regular. De la desigualdad $|2z/5| < 1$ resulta que el círculo $|z| < 5/2$ es la región de convergencia de la serie.

1007. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z) = 1/(2z - 5)$ en el entorno del punto $z = \infty$.

Resolución. Tenemos

$$f(z)=\frac{1}{2z-5}=\frac{1/(2z)}{1-5/(2z)}.$$

En el entorno del punto $z=\infty$ se cumple la desigualdad $|5/2z)|<1$, por eso $f(z)$ se puede representar en forma de la suma de una progresión geométrica infinita decreciente con primer término $a=1/(2z)$ y denominador $q=5/(2z)$. Por consiguiente,

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\frac{5}{2^2z^2}+\frac{5^2}{2^3z^3}+\frac{5^3}{2^4z^4}+\ldots,\text{ o bien } f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{2^nz^n}.$$

En el desarrollo falta la parte regular. La serie converge en la región $|z|>5/2$ (fuera del círculo).

1008. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ en el anillo $1<|z|<3$.

Resolución. Desarrollamos la función dada en fracciones elementales:

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3},\quad\text{o bien } 1=A(z-3)+B(z-1).$$

Haciendo $z=1$, obtenemos $1=-2A$, o sea $A=-1/2$; tomando $z=3$, tenemos $1=2B$, o sea, $B=1/2$. De este modo,

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Teniendo en cuenta que $1<|z|<3$, podemos escribir

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1/z}{1-1/z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1/3}{1-z/3}.$$

En consecuencia,

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^n}\right).$$

1009. Desarrollar en serie de Laurent la función $f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}$ por potencias de $z-2$.

Resolución. Pongamos $z-2=z'$. Entonces

$$f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(z'+2)^4}{z'^2}=\frac{z'^4+8z'^3+24z'^2+32z'+16}{z'^2}=$$

$$\frac{16}{z'^2}+\frac{32}{z'}+24+8z'+z'^2,$$

o sea,

$$f(z)=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2.$$

Aquí la parte principal contiene dos términos y la regular, tres.

Puesto que el desarrollo contiene un número finito de términos, él es válido para un punto cualquiera del plano, excepto para $z = 2$. Este punto es el polo de segundo orden de la función $f(z)$. De residuo de esta función respecto al polo $z = 2$ sirve el coefficiente de $(z-2)^{-1}$, o sea, 32.

1010. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots .$$

1011. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{4}{z^4} + \frac{3}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots .$$

1012. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ en el entorno de los puntos: 1) $z = 0$; 2) $z = \infty$.

1013. Desarrollar en serie de Laurent la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} z - z}{z^5}, & \text{si} \quad z \neq 0; \\ \infty, & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

1014. Hallar los polos de la función $f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

1015. Desarrollar en serie de Taylor por potencias de $z - 1$ la función $f(z) = 1/z$. Hallar la región de convergencia de la serie.

1016. Desarrollar en serie de Maclaurin la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos z}{z^2}, & \text{zi} \quad z \neq 0; \\ 1/2, & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

1017. Desarrollar en serie de Laurent la función $f(z) = 2^z + 2^{1/z} - 2$ definida en todo el plano, salvo en el punto $z = 0$.

§ 6. Cálculo de residuos de funciones. Aplicación de los residuos para el cálculo de integrales

Sea a el polo de n-ésimo orden de la función $f(z)$. El residuo de la función $f(z)$ respecto a su polo de n-ésimo orden se calcula por la fórmula

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n \cdot f(z)]}{dz^{n-1}}$$

(res significa «residuo»).

Si a es el polo de primer orden de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname*{res}_a (fz) = \lim_{z\to a} (z-a) f(z).$$

Supongamos que las funciones $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ son regulares en el entorno del punto $z = a$, $\varphi(a) \neq 0$ y $\psi(z)$ en el punto $z = a$ se tiene un cero de primer orden. Entonces al calcular el residuo de la función $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ en el polo simple $z = a$ es cómodo utilizar la fórmula

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Sea $f(z)$ una función analítica en la región D, salvo el número final de polos $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Designamos por γ un contorno cerrado arbitrario, suave a trozos, que contenga dentro de sí los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y esté por completo en la región D. En este caso $\int_\gamma f(z)\,dz$ es igual a *la suma de los residuos de la función* $f(z)$ *con respecto a los polos* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, *multiplicada por* $2\pi i$, o sea

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f(z)$$

(teorema principal de los residuos).

Examinemos un caso particular. Sea $f(z)$ una función analítica en la región D, el punto a pertenece a la región D, pero $f(a) \neq 0$. En este caso la función $F(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ tiene en la región D un polo a de primer orden. Determinamos el residuo de la función $F(z)$ con respecto al polo a:

$$\operatorname*{res}_a F(z) = \lim_{z\to a} (z-a)\cdot F(z) = \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

De aquí, aplicando el teorema principal de los residuos, obtenemos

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i f(a),$$

o bien

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

Hemos obtenido una fórmula muy importante en la teoría de las funciones de variable compleja: *fórmula de Cauchy*.

Sin embargo, es necesario señalar que la deducción de la fórmula de Cauchy debe preceder a la demostración del teorema principal de los residuos. Aquí nos hemos aprovechado de la ocasión para dar a conocer al lector esta fórmula importante.

Sea $f(z)$ una función analítica en el semiplano superior, incluyendo el eje real, salvo el número finito de polos a_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) situados por encima del eje real. Además, se supone que el producto $z^2 f(z)$ para $|z| \to +\infty$ tiene límite finito. En este caso para calcular la integral definida $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, de la función de variable real, se utiliza la fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_m),$$

donde r_k ($k = 1, 2, \ldots$, el residuo m) es de la función $f(z)$ con respecto al polo a_k.

1018. Hallar los residuos de la función $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$.

Resolución. De polos de la función sirven los puntos $z=1$ y $z=3$

$$\operatorname*{res}_{1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-3}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{3} f(z)=\lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 3}\frac{z}{z-1}=\frac{1}{2}.$$

1019. Hallar los residuos de la función $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$.

Resolución. Tenemos

$$f(z)=\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}.$$

De polos de la función sirven los puntos $2i$ y $-2i$:

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{z+2i}=\frac{4}{4i}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{-2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to -2i}\frac{1}{z-2i}-=\frac{4}{4i}=\frac{i}{4}.$$

1020. Hallar los residuos de la función $f(z)=\frac{1}{z^2-2z+5}$.

Resolución. De polos de la función sirven las raíces del denominador: $z=1\pm 2i$. Por consiguiente,

$$f(z)=\frac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}.$$

Hallamos

$$\operatorname*{res}_{1+2i} f(z)=\lim_{z\to 1+2i}\frac{z-1-2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\lim_{z\to 1+2i}\frac{1}{z-1+2i}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{1-2i} f(z)=\lim_{z\to 1-2i}\frac{z-1+2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\lim_{z\to 1-2i}\frac{1}{z-1-2i}=\frac{i}{4}.$$

1021. Hallar el residuo de la función $f(z)=\frac{z^2}{(z-2)^3}$.

Resolución. Puesto que $z=2$ es un polo de tercer orden, entonces

$$\operatorname*{res}_{2} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2\left[\frac{z^2}{(z-2)^3}\cdot(z-2)^3\right]}{dz^2}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2(z^2)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\cdot 2=1.$$

1022. Hallar el residuo de la función $f(z)=\frac{1}{1-\cos z}$ con respecto al polo $z=0$.

Resolución. El punto $z=0$ es polo de segundo orden. En efecto,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\operatorname{sen} z}=2$$

es una magnitud finita. Entonces

$$\operatorname*{res}_{0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-z^2\operatorname{sen} z}{(1-\cos z)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2z\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots\right)-z^2\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)}{\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots\right)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z^5}{12}}{\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots\right)^2}=0.$$

1023. Hallar $\int\limits_{\gamma}\frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$, donde γ es un contorno cerrado dentro del cual están los polos $z=1$, $z=2$, $z=3$.

Resolución. Determinemos los residuos de la función subintegral:

$$\operatorname*{res}_{1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z+1}{(z-2)(z-3)}=1,\qquad \operatorname*{res}_{2} f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z+1}{(z-1)(z-3)}=-3$$

$$\operatorname*{res}_{3} f(z)=\lim_{z\to 3}\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}=2.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{\gamma}\frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz=2\pi i(1-3+2)=0.$$

1024. Hallar $\int\limits_{\gamma}\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz$, donde γ es la circunferencia $|z|=3$.

Resolución. Tenemos $f(z)=\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}$. Los polos i, $-i$, 2, están dentro del contorno cerrado γ. De aquí,

$$\operatorname*{res}_{i} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-2)}=\frac{1}{2i(2-i)},$$

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z)=\lim_{z\to -i}(z+i)\cdot f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z-2)}=-\frac{1}{2i(2+i)},$$

$$\operatorname*{res}_{2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)\cdot f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z^2}{z^2+1}=\frac{4}{5};$$

$$\int\limits_{\gamma}\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz=2\pi i\left[\frac{1}{2i(2-i)}-\frac{1}{2i(2+i)}+\frac{4}{5}\right]=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2-i}-\frac{1}{2+i}+\frac{8}{5}i\right)=\pi\left(\frac{2}{5}i+\frac{8}{5}i\right)=2\pi i.$$

1025. Hallar la integral definida $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Resolución. La función $\frac{1}{(z^2+4)^2}$ es analítica en el semiplano superior, excepto en el polo $2i$. Además,

$$\lim_{|z| \to +\infty} z^2 f(z) = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{z^2}{(z^2+4)^2} = 0,$$

o sea, es una magnitud finita.

Determinamos el residuo de la función $f(z) = 1/(z^2+4)^2$, con respecto al polo de segundo orden $2i$:

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2} \right] = \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+2i)^2} \right] =$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{2}{(z+2i)^3} = \frac{2}{64i} = -\frac{1}{32} i.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \left(-\frac{1}{32} i \right) = \frac{\pi}{16}.$$

1026. Hallar $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, si γ es una circunferencia: 1) $z = 1$; 2) $|z| = 3)$; 3) $|z| = 5$.

Resolución. Determinemos los residuos de la función subintegral con respecto a los polos $z = 0$, $z = -2$, $z = -4$:

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \lim_{z \to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{8},$$

$$\operatorname*{res}_{-2} f(z) = \lim_{z \to -2} (z+2) \cdot f(z) = \lim_{z \to -2} \frac{1}{z(z+4)} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{-4} f(z) = \lim_{z \to -4} (z+4) \cdot f(z) = \lim_{z \to -4} \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{8}.$$

1) Dentro del contorno γ de la circunferencia $|z| = 1$ se halla solamente el polo $z = 0$; entonces

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

2) Dentro del contorno γ de la circunferencia $|z| = 3$ están los polos $z = 0$ y $z = -2$; entonces

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{4}.$$

3) Dentro del contorno γ de la circunferencia $|z| = 5$ se encuentran los polos $z = 0$, $z = -2$, $z = -4$; entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0.$$

1027. Hallar el residuo de la función $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.

1028. Hallar los residuos de la función $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$.

1029. Hallar el residuo de la función $f(z) = 1/\text{sen}\, z$ con respecto al polo $z = \pi$.

1030. Hallar el residuo de la función $f(z) = (z+1)/z^2$.

1031. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-a}\,dz$, γ es la circunferencia $|z| = R > |a|$.

1032. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-a)(z-b)}\,dz$, γ es la circunferencia $|z| = R$, $R > |a|$, $R\,|b|$, $a \neq b$.

1033. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-2z+2}$, γ es la circunferencia dentro de la cual se contienen los polos del denominador.

1034. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-i)(z-3)}\,dz$, γ es la circunferencia $|z| = 2$.

1035. Calcular la integral definida $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Capítulo VIII. Elementos del cálculo operacional

§ 1. Determinación de transformadas de funciones

1. Definiciones principales. Sea que la función f (t) posee las siguientes propiedades:

1ª. $f(t) = 0$ para $t < 0$.

2ª. $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ para $t > 0$, donde $M > 0$ y s_0 son ciertas constantes reales.

3ª. En un segmento finito cualquiera $[a, b]$ del semieje positivo Ot la función $f(t)$ satisface las *condiciones de Dirichlet*, o sea: a) *está acotada*; b) *es continua, o bien tiene solamente un número finito de puntos de discontinuidad de primer género*; c) *tiene un número finito de extremos*.

En el cálculo operacional tales funciones se llaman *transformables por Laplace* u *originales*.

Sea $p = \alpha + \beta i$ un parámetro complejo, además, $\operatorname{Re} p = \alpha \geqslant s_1 > s_0$.

Para las condiciones enunciadas la integral $\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ converge y es la función de p:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \bar{f}(p).$$

Esta integral ha recibido el nombre de *integral de Laplace* y la función del argumento complejo p, definida por la misma, se llama *transformación de Laplace* de la función $f(t)$ o *transformada de Laplace* $f(t)$ o bien simplemente transformada $f(t)$.

El hecho de que la función $\bar{f}(p)$ sea la transformada de la original $f(t)$ se designa por los símbolos siguientes:

$$\bar{f}(p) = L\{f(t)\}, \quad \text{o bien} \quad \bar{f}(p) \doteqdot f(t).$$

Se conviene en que por valor de la función original $f(t)$ en todo su punto de discontinuidad de primer género t_0 se toma la semisuma de sus valores límites a la izquierda y la derecha de este punto:

$$f(t_0) = (1/2)\,[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$$

para $t_0 \neq 0$; y para $t_0 = 0$: $f(0) = f(+0)$.

Al observar esta condición, la correspondencia entre los originales y las transformadas posee las propiedades siguientes:

esta correspondencia es recíprocamente unívoca (o sea, a toda original le corresponde una única transformada y viceversa),

a toda combinación lineal de un conjunto finito de originales le corresponde, en calidad de transformada, la combinación lineal respectiva de las transformadas de los mismos.

De este modo, si $\bar{f}_k(p) \doteq f_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_k \bar{f}_k(p) \doteq \sum_{k=1}^{k=n} c_k f_k(t).$$

2. Determinación de transformadas de funciones. En la tabla y en cada uno de los ejercicios citados a continuación se indica solamente el valor de $f(t)$ para $t > 0$ (siempre se considera que $f(t) = 0$ si $t < 0$).

Tabla de las transformadas de las funciones elementales principales

N°	$f(t)$ para $t > 0$	$\bar{f}(p)$	N°	$f(t)$ para $t > 0$	$\bar{f}(p)$
I	1	$\dfrac{1}{p}$	VI	$e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
II	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	VII	$e^{\alpha t}\cdot\operatorname{sen}\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
III	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	VIII	$\dfrac{t^n}{n!}\cdot e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
IV	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	IX	$t\cdot\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
V	$\operatorname{sen}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	X	$t\cdot\operatorname{sen}\beta t$	$\dfrac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

1036. Hallar la transformada de la función $f(t) = a^t$.

Resolución. Como $a = e^{\ln a}$, $f(t) = e^{t\cdot\ln a}$. Aplicando la fórmula III, obtenemos

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p-\ln a}.$$

1037. Hallar la transformada de la función $f(t) = \cos^3 t$.

Resolución. Utilizamos la fórmula de Euler $\cos t = (e^{ti} + e^{-ti})/2$. Entonces

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ti}+3e^{ti}+3e^{-ti}+e^{-3ti}) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3ti}+e^{-3ti}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

Aplicando la fórmula IV, obtenemos

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}.$$

1038. Hallar la transformada de la función $f(t) = \text{sh } bt$.

Resolución. Por definición de seno hiperbólico tenemos $f(t) = (1/2)\, e^{bt} - (1/2)\, e^{-bt}$. En consecuencia,

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)} - \frac{1}{2(p+b)} = \frac{b}{p^2-b^2}.$$

1039. Hallar la transformada de la función $f(t) = \text{sh } at \text{ sen } bt$.

Resolución. Puesto que $\text{sh } at = (e^{at} - e^{-at})/2$, entonces

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{at} \text{ sen } bt - \frac{1}{2} e^{-at} \text{ sen } bt.$$

Usamos la fórmula VII:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2} \frac{b}{(p-a)^2+b^2} - \frac{1}{2} \frac{b}{(p+a)^2+b^2} = \frac{2pab}{[(p-a)^2+b^2]\,[(p+a)^2+b^2]}.$$

1040. Hallar la transformada de la función $f(t) = t \text{ ch } bt$.

Resolución. Puesto que

$$f(t) = t \cdot \frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2} = \frac{1}{2} te^{bt} + \frac{1}{2} te^{-bt},$$

entonces, usando la fórmula VIII para $n = 1$, $\alpha = \pm b$, obtenemos

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)^2} + \frac{1}{2(p+b)^2} = \frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}.$$

Hallar las transformadas de las funciones:
1041. $f(t) = \text{sen}^2\, t$. **1042.** $f(t) = e^t \cos^2 t$.
1043. $f(t) = \text{ch } bt$. **1044.** $f(t) = \text{sh } at \cos bt$.
1045. $f(t) = \text{ch } at \text{ sen } bt$. **1046.** $f(t) = \text{ch } at \cos bt$.
1047. $f(t) = t \text{ ch } bt$.

§ 2. Determinación de la función original a partir de transformada

Al determinar la función original a partir de la transformada se utilizan, en casos elementales, la tabla de las transformadas de las funciones elementales principales y los teoremas de descomposición (primero y segundo).

El *segundo teorema de descomposición* permite hallar la original para una transformada que sea una función racional fraccional de p, es decir, $\bar{f}(p) = u(p)/v(p)$, donde $u(p)$ y $v(p)$ son polinomios de p de grados m y n, respectivamente; además $m < n$.

Si la descomposición $v(p)$ en factores elementales tiene la forma $v(p) = (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \ldots (p - p_r)^{k_r}$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n)$, entonces, como es sabido, la función $\bar{f}(p)$ puede ser descompuesta en suma de fracciones elementales de la forma $\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}$, donde j toma todos los valores de 1 a r y s, todos los valores de 1 a k_j. De este modo,

$$\bar{f}(p) = \sum_{j=1}^{j=r} \sum_{s=1}^{s=k_j} \frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \tag{1}$$

Todos los coeficientes de esta descomposición se pueden determinar por la fórmula

$$A_{j,s}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\left\{\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}[(p-p_j)^{k_j}\cdot\bar{f}(p)]\right\}. \qquad (2)$$

En vez de esta fórmula, para determinar los coeficientes $A_{j,s}$ pueden ser utilizados los procedimientos elementales aplicables en el cálculo integral para integrar fracciones racionales.

En particular, es conveniente hacerlo en los casos en que todas las raíces del denominador $v(p)$ sean simples y conjugadas de par en par.

Si todas las raíces de $v(p)$ son simples, o sea, $v(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots$ $\ldots(p-p_n)$ $(p_j\neq p_k$ para $j\neq k)$, la descomposición se simplifica:

$$\bar{f}(p)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{A_j}{p-p_j}, \quad \text{donde} \quad A_j=\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}. \qquad (3)$$

Al determinar por uno u otro procedimiento de descomposición de $\bar{f}(p)$ en fracciones elementales, la función original $f(t)$ se encuentra con ayuda de las fórmulas siguientes:

a) en caso de raíces múltiples del denominador $v(p)$:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{s=1}^{s=k_j}A_{j,s}\frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!}\cdot e^{p_jt}; \qquad (4)$$

b) en caso de raíces simples del denominador $v(p)$:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}\cdot e^{p_jt}. \qquad (5)$$

Si la transformada de la función buscada puede ser desarrollada en serie de potencias, por potencias de $1/p$, o sea,

$$\bar{f}(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

(además, esta serie converge hacia $\bar{f}(p)$ para $|p|>R$, donde $R=\lim\limits_{n\to\infty}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|\neq\infty$, entonces la original $f(t)$ se determina por la fórmula

$$f(t)=a_0+a_1\cdot\frac{t}{1!}+a_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\cdot\frac{t^n}{n!}+\ldots,$$

con ello esta serie converge para todos los valores de t (*primer teorema de descomposición*).

1048. Hallar la original de la función $\bar{f}(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.

Resolución. Utilizamos los procedimentos elementales para descomponer esta fracción en suma de fracciones tales, cuyos originales se conocen:

$$\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}.$$

Pero, según las fórmulas VI y VII de la tabla tenemos

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+4} \risingdotseq e^t\cdot\cos 2t; \qquad \frac{1}{(p-1)^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4} \risingdotseq \frac{1}{2}e^t\cdot\operatorname{sen} 2t.$$

Por eso

$$\frac{p}{(p-1)^2+4} \risingdotseq e^t\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right).$$

1049. Hallar la original de la función $\bar f(p)=\frac{1}{p^3-8}$.

Resolución. En este ejercicio también utilizamos los procedimientos elementales de descomposición, conocidos del cálculo integral. Descompongamos la fracción dada en fracciones elementales:

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}.$$

Para determinar los coeficientes tenemos la identidad

$$1\equiv A(p^2+2p+4)+(Bp+C)(p-2).$$

Haciendo $p=2$, hallamos $1=12A$; $A=1/12$. Igualando a cero el coeficiente de p^2 y el término independiente a uno, obtenemos $A+B=0$, $4A-2C=1$ De aquí, $B=-A=-1/12$; $C=2A-1/2=-1/3$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{(p+1)+3}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Así, pues,

$$\bar f(p)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

De aquí, utilizando las fórmulas III, VI y VII de la tabla de transformadas, encontramos

$$f(t)=\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}(\cos t\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen} t\sqrt{3}).$$

1050. Hallar la original de la función $\bar f(p)=\frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$.

Resolución. La descomposición de $\bar f(p)$ en fracciones elementales tiene la forma

$$\bar f(p)=\frac{A_{1,1}}{(p-1)^3}+\frac{A_{1,2}}{(p-1)^2}+\frac{A_{1,3}}{p-1}+\frac{A_{2,1}}{(p+2)^2}+\frac{A_{2,2}}{p+2}.$$

Hallamos los coeficientes de esta descomposición, utilizando la fórmula (2):

$$A_{1,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to 1}\{(p-1)^3\cdot\bar f(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{p}{(p+2)^2}=\frac{1}{9};$$

$$A_{1,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\{(p-1)^3\cdot\bar f(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p}{(p+2)^2}\right]=$$

$$=\lim_{p\to 1}\left[\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{2p}{(p+2)^3}\right]=\frac{1}{27};$$

$$A_{1,3}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p}{(p+2)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\left[-\frac{4}{(p+2)^3}+\frac{6p}{(p+2)^3}\right]=-\frac{1}{27};$$

$$A_{2,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to -2}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to -2}\frac{p}{(p-1)^3}=\frac{2}{27};$$

$$A_{2,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}\left[\frac{p}{(p-1)^3}\right]=$$

$$=\lim_{p\to -2}\left[\frac{1}{(p-1)^3}-\frac{3p}{(p-1)^4}\right]=\frac{1}{27}.$$

De este modo,

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{27}\cdot\left\{\frac{3}{(p-1)^3}+\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p-1}+\frac{2}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}\right\}.$$

De aquí utilizando las fórmulas III y VIII, encontramos

$$f(t)=\frac{1}{27}\left(\frac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+e^{-2t}\right)=\frac{3t^2+2t-2}{54}\cdot e^t+\frac{2t+1}{27}\cdot e^{-2t}.$$

1051. Hallar la original de la función $\bar{f}(p)=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$.

Resolución. Puesto que en el caso dado todas las raíces del denominador son reales y simples, lo mejor es valerse de la fórmula (5). Tenemos

$$u(p)=p+1,\quad v(p)=p(p-1)(p-2)(p-3)=p^4-6p^3+11p^2-6p;$$
$$v'(p)=4p^3-18p^2+22p-6.$$

Encontramos las raíces de $v(p)$: $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=2$, $p_4=3$. Luego obtenemos

$$\frac{u(p_1)}{v(p_1)}=\frac{1}{-6}=-\frac{1}{6};\qquad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)}=\frac{2}{2}=1;$$
$$\frac{u(p_3)}{v'(p_3)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2};\qquad \frac{u(p_4)}{v'(p_4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ahora por la fórmula (5) encontramos

$$f(t)=-\frac{1}{6}+e^t-\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{3t}.$$

1052. Hallar la función original de $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{p(1+p^4)}$, utilizando el primer teorema de descomposición.

Resolución. Tenemos

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{p(1+p^4)}=\frac{1}{p^5}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p^4}}=\frac{1}{p^5}-\frac{1}{p^9}+\frac{1}{p^{13}}-\dots .$$

Esta serie converge para $|p| > 1$. De aquí, obtenemos

$$f(t) = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} - \frac{t^{16}}{16!} + \ldots .$$

Hallar $f(t)$ si $\bar{f}(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$.

Indicación: descomponer $\bar{f}(p)$ en fracciones elementales.

Hallar las funciones originales a partir de las transformadas dadas:

1054. $\bar{f}(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)}$.

1055. $\bar{f}(p) = \frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$.

1056. $\bar{f}(p) = \frac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$.

1057. Con ayuda del primer teorema de descomposición hallar la original para la función $\bar{f}(p) = 1/(p^k + a^k)$, donde k es un número positivo entero.

§ 3. Convolución de funciones. Transformada de la derivada y de la integral de una función original

Se llama *convolución* de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ a la función

$$F(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau)\, d\tau.$$

La integral que determina la convolución no cambia su valor si se permuten las funciones f_1 y f_2, por eso la convolución de dos funciones es simétrica con respecto a las funciones sometidas a la convolución.

La transformada de la convolución de dos originales es igual al producto de las transformadas de los mismos (teorema de convolución de los originales): si $\bar{f}_1(p) \div f_1(t)$, $\bar{f}_2(p) \div f_2(t)$, entonces

$$\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau)\, d\tau \div \bar{f}_1(p) \cdot \bar{f}_2(p).$$

Sea que la original $f(t)$ es derivable n veces y sus derivadas hasta el n-ésimo orden son, a su vez, originales. Entonces es justo el *teorema de derivación del original*: si $\bar{f}(p) \div f(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, luego

$$f^{(k)}(t) \div p^k \cdot \bar{f}(p) - \{p^{k-1} \cdot f(0) + p^{k-2} \cdot f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)\}.$$

En particular,

$$f'(t) \div p \cdot \bar{f}(p) - f(0), \quad f''(t) \div p^2 \cdot \bar{f}(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$

etc.

Para todas las funciones originales es válido el *teorema de integración*: si $\bar{f}(p) \risingdotseq f(t)$, entonces

$$\frac{\bar{f}(p)}{p} \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

De aquí se ve que las transformadas de una derivada y de una integral se obtienen de la transformada de una función $f(t)$ con ayuda de la ejecución de operaciones algebraicas sobre $\bar{f}(p)$. Conviene también señalar (véase la tabla de transformadas) que las transformadas de una parte considerable de las funciones que se utilizan en la práctica ($e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\operatorname{sen} \beta t$, etc.) son funciones algebraicas de p.

Esto ofrece la posibilidad de reducir muchas operaciones del análisis matemático (resolución de ecuaciones diferenciales e integrales, etc.) a la ejecución de las operaciones algebraicas sobre las transformadas de las funciones buscadas.

1058. Valiéndose del teorema de convolución, hallar la original de la función $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^4-1}$.

Resolución. Escribimos $\bar{f}(p)$ en la forma $\frac{p}{p^2-1} \cdot \frac{1}{p^2+1}$. En virtud de que $\frac{p}{p^2-1} \risingdotseq \operatorname{ch} t$, $\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \operatorname{sen} t$, según el teorema de convolución tenemos

$$\frac{p}{p^4-1} \risingdotseq \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau) \operatorname{sen} \tau \, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(t-\tau) \operatorname{sen} \tau + \operatorname{ch}(t-\tau) \cos \tau\right] \Big|_0^t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t).$$

1059. Hallar la transformada de $y''(t) - y'(t) - y(t)$ si $y(0) = y'(0) = 0$ e $\bar{y}(p) \risingdotseq y(t)$.

Resolución. Según el teorema de derivación del original tenemos:

$$y'(t) \risingdotseq p\bar{y}(p) - y(0) = p \cdot \bar{y}(p),$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2 \cdot \bar{y}(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot \bar{y}(p).$$

De aquí hallamos

$$y''(t) - y'(t) - y(t) \risingdotseq (p^2 - p - 1) \cdot \bar{y}(p)$$

(a la suma de las funciones le corresponde, en calidad de transformada, la suma de sus transformadas).

1060. Hallar la transformada de $y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$, si $y(0) = 1$ e $\bar{y}(p) \risingdotseq y(t)$.

Resolución. Según los teoremas de derivación e integración de la función original tenemos:

$$y'(t) \risingdotseq p\cdot\bar{y}(y)-y(0)=p\cdot y(p)-1, \qquad \int_0^t y(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{\bar{y}(p)}{p}.$$

De aquí hallamos

$$y'(t)+y(t)+\int_0^t y(\tau)\,d\tau \risingdotseq p\bar{y}(p)-1+\bar{y}(p)+\frac{\bar{y}(p)}{p}=\frac{p^2+p+1}{p}\cdot\bar{y}(p)-1.$$

1061. Hallar la convolución de las funciones t y $\cos t$ y la transformada de la misma.

1062. Valiéndose del teorema de convolución, hallar la función original para $\bar{f}(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

1063. Hallar la transformada de $F(t)=y(t)-2y'(t)$ si $y(0)=0$, $y(t)\risingdotseq\bar{y}(p)$.

1064. Hallar la transformada $F(t)=y'''(t)-y''(t)+2y'(t)-2y(t)$, si $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$, $y(t)\risingdotseq\bar{y}(p)$.

1065. Hallar la transformada de $F(t)=y'(t)-\int_0^t y(\tau)\,d\tau$ si $y(0)=0$, $y(t)\risingdotseq\bar{y}(p)$.

§ 4. Aplicación del cálculo operacional a la resolución de algunas ecuaciones diferenciales e integrales

Si se da una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t)$$

cuyo segundo miembro $f(t)$ es la función original, entonces la solución de esta ecuación que satisface las condiciones iniciales arbitrarias de la forma $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}$ (o sea, la solución de un problema arbitrario de Cauchy formulado para esta ecuación, con condiciones iniciales para $t=0$) sirve también de original. Designando la transformada de esta solución por $\bar{y}(p)$, encontramos la transformada del primer miembro de la ecuación diferencial inicial e, igualándola a la transformada de la función $f(t)$, llegamos a la llamada *ecuación de transformación*, que siempre es una ecuación algebraica lineal con respecto a $\bar{y}(p)$. Una vez determinada $\bar{y}(p)$ a partir de esta ecuación, hallamos la función original $y(t)$.

El mismo método de paso a la ecuación de transformación permite encontrar fácilmente la solución de las ecuaciones integrales que tienen la forma

$$\int_0^t K(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau=f(t); \qquad y(t)=f(t)+\int_0^t K(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

en las cuales las funciones $K(t)$ y $f(t)$ son originales, puesto que la integral que forma parte de estas ecuaciones es la convolución de las funciones $y(t)$ y $K(t)$.

Estas ecuaciones integrales son un caso particular de las *ecuaciones integrales de Volterra, de primer y segundo géneros*, cuya forma general se obtiene si la función $K(t-\tau)$ (llamada *núcleo* de una ecuación integral) se sustituye por cierta función de dos argumentos $K(t, \tau)$

1066. Resolver la ecuación diferencial $y''-2y'-3y=e^{3t}$ si $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Resolución. Pasamos a las transformadas:

$$p^2\bar{y}-p\cdot y(0)-y'(0)-2(p\bar{y}-y(0))-3\bar{y}=\frac{1}{p-3},$$

o bien

$$p^2\cdot\bar{y}-2p\bar{y}-3\bar{y}=\frac{1}{p-3}; \quad \bar{y}=\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Descomponemos esta fracción racional en fracciones elementales:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}=\frac{A}{(p-3)^2}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+1},$$

$$1=A(p+1)+B(p-3)(p+1)+C(p-3)^2.$$

Haciendo $p=-1$, obtenemos $1=16C$, es decir, $C=1/16$; para $p=3$ tenemos $1=4A$, o sea, $A=1/4$. Comparando los coeficientes de p^2, obtenemos $0=B+C$, es decir, $B=-C=-1/16$. Por consiguiente,

$$\bar{y}=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{2}{16(p+1)},$$

de donde

$$y=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}.$$

1067. Resolver la ecuación $y''+y'-2y=e^{-t}$ si $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Resolución. Pasamos a las transformadas:

$$[p^2\bar{y}-p\cdot y(0)-y'(0)]+[p\cdot\bar{y}-y(0)]-2\bar{y}=\frac{1}{p+1}.$$

Después de transformaciones sencillas, obtenemos

$$\bar{y}=\frac{p+2}{(p+1)(p^2+p-2)}=\frac{1}{p^2-1}.$$

De aquí, $y=\operatorname{sh} t$.

1068. Resolver la ecuación integral $y=\int\limits_0^t y\,dt+1$.

Resolución. Construimos la ecuación de transformación:

$$\bar{y}=\frac{\bar{y}}{p}+\frac{1}{p}, \quad \bar{y}(p-1)=1, \quad \bar{y}=\frac{1}{p-1}.$$

Por consiguiente, $y=e^t$.

1069. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^t y(\tau)\,\text{sen}\,(t-\tau)\,d\tau = 1-\cos t.$$

Resolución. El primer miembro de la ecuación es la convolución de las funciones $y(t)$ y sen t. Pasando a las transformadas, obtenemos

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{(p^2+1)\cdot p}.$$

Por consiguiente, $\bar{y}(p)=\frac{1}{p}$ e $y(t)=1$.

1070. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^t y(\tau)\,e^{t-\tau}\,d\tau = y(t)-e^t.$$

Resolución. El primer miembro de la ecuación es la convolución de las funciones $y(t)$ y e^t. Pasamos a las transformadas

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1}=\bar{y}(p)-\frac{1}{p-1}, \quad \bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1}-\bar{y}(p)=-\frac{1}{p-1}.$$

Por consiguiente, $\bar{y}(p)=\frac{1}{p-2}$, o sea, $y(t)=e^{2t}$.

1071. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=x+2y,$$

$$\frac{dy}{dt}=2x+y+1,$$

si $x(0)=0$, $y(0)=5$.

Resolución. Pasando a las transformadas, obtenemos

$$\begin{cases} p\cdot\bar{x}(p)=\bar{x}(p)+2\bar{y}(p), \\ p\cdot\bar{y}(p)-5=2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)+\dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Despejando $\bar{x}$ e $\bar{y}$, nos queda,

$$\bar{x}(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)}, \quad \bar{y}(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Para determinar x utilizamos el teorema de descomposición y la fórmula (5) del § 2:

$$u(p)=10p+2,\ v(p)=p^3-2p^2-3p,\ v'(p)=3p^2-4p-3,$$
$$p_1=0, \quad p_2=-1, \quad p_3=3;$$

$$\frac{u(p_1)}{v'(p_1)}=\frac{u(0)}{v'(0)}=-\frac{2}{3}, \quad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)}=\frac{u(-1)}{v'(-1)}=-2, \quad \frac{u(p_3)}{v'(p_3)}=\frac{u(3)}{v'(3)}=\frac{8}{3}.$$

De este modo, $x=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$. Análogamente, hallamos $y=$ $=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$.

Resolver las ecuaciones diferenciales:

1072. $y' = 2y = 0$; $y(0) = 1$.

1073. $y' + y = e^t$; $y(0) = 0$.

1074. $y'' - 9y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$.

1075. $y'' + y' - 2y = e^t$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

1076. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

1077. $\frac{dx}{dt}=2y,\ \frac{dy}{dt}=2x;\quad x(0)=2,\quad y(0)=2.$

1078. $\frac{dx}{dt}=3x+4y,\ \frac{dy}{dt}=4x-3y;\quad x(0)=y(0)=1.$

Resolver las ecuaciones integrales:

1079. $\int\limits_0^t y(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau=\frac{1}{3}t^3.$

1080. $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=1-\cos t.$

§ 5. Fórmula general de inversión

Supongamos que la función $f(t)$ posee las siguientes propiedades:

1ª. $f(t)=0$ para $t<0$.

2ª. $|f(t)|<Me^{s_0 t}$ para $t<0$, donde $M>0$ y s_0 son ciertas constantes reales.

3ª. Sobre un segmento finito cualquiera $[a, b]$ $(0<a<b)$ la función satisface las condiciones de Dirichlet.

Entonces la función $\overline{f}(p)$ definida por la igualdad $\overline{f}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$ es analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p \geqslant s_1 > s_0$.

Con ello es justa la *fórmula de inversión* (*fórmula de Riemann—Mellin*)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp,\ \text{ o bien }\ f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp$$

que expresa la función original $f(t)$ por medio de la transformada $\overline{f}(p)$, además σ es un número arbitrario que satisface la desigualdad $\delta > s_0$.

Si $|\overline{f}(p)|<CR^{-k}$, donde $p=Re^{i\theta}$, $-\pi\leqslant\theta<\pi$, $R>R_0$, R_0, C y $k>0$ son constantes, entonces la integral $\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp$ en la fórmula de integración puede ser sustituida por la integral $\int\limits_{\gamma}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp$, donde γ es una circunferencia con centro en el origen de las coordenadas y que contiene en su interior todos los polos de la función $F(p) = e^{pt}\bar{f}(p)$. Por consiguiente,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} \cdot \bar{f}(p)\, dp.$$

Aplicando el teorema principal sobre los residuos, obtenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_m),$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_m$ son los residuos de la función $F(p)$ con respecto a los polos. De suerte que $f(t) = \sum_{j=1}^{m} r_j$. Esta fórmula para la transformada racional fraccional en la notación detallada no es más que las fórmulas (4) y (5) del § 2.

1081. Hallar la función original a partir de la transformada $\bar{f}(p) = \frac{1}{(p-1)^3}$.

Resolución. Obtenemos el residuo de la función $F(p) = \frac{e^{pt}}{(p-1)^3}$:

$$: r = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} \frac{d^2}{dp^2} [(p-1)^3 \cdot F(p)] = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} \frac{d^2}{dp^2} (e^{pt}) = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} t^2 e^{pt} = \frac{t^2}{2!} e^t.$$

Por consiguiente, $f(t) = \frac{t^2 e^t}{2!}$.

1082. Hallar la función original a partir de la transformada

$$\bar{f}(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

Resolutión. Tenemos

$$F(p) = \frac{pe^{pt}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)},$$

$$r_1 = \lim_{p \to -1} (p+1) \cdot F(p) = -\frac{1}{6} e^{-t}, \quad r_2 = \lim_{p \to -2} (p+2) \cdot F(p) = e^{-2t},$$

$$r_3 = \lim_{p \to -3} (p+3) \cdot F(p) = -\frac{3}{2} \cdot e^{-3t}, \quad r_4 = \lim_{p \to -4} (p+4) \cdot F(p) = \frac{2}{3} \cdot e^{-4t}.$$

Por consiguiente, $f(t) = -\frac{1}{6} e^{-t} + e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} + \frac{2}{3} e^{-4t}$.

Hallar las funciones originales a partir de las transformadas dadas:

1083. $\bar{f}(p) = \frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$.

1084. $\bar{f}(p) = \frac{1}{p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p}$.

1085. $\bar{f}(p) = \frac{1}{(p-1)^3 (p^3+1)}$.

§ 6. Aplicación del cálculo operacional a la resolución de algunas ecuaciones de la física matemática

Examinemos las resoluciones de algunas ecuaciones de la física matemática: la de onda y la de conducción del calor. En este caso los métodos más eficaces son los del cálculo operacional basados en la idea de utilizar la transformación de Laplace. Nos limitamos al caso cuando la función buscada u depende de dos variables independientes x y t, donde x es la coordenada espacial y t el tiempo. La no estacionaridad del problema en examen consiste en que se busca una solución que depende esencialmente de las condiciones iniciales y por eso tiene lugar un régimen inestable (o transitorio) del proceso físico.

Supongamos que una ecuación diferencial en derivadas parciales tiene la forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Cu+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+B_1\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{1}$$

donde A, B, C, A_1, B_1 son las funciones continuas de x definidas en el intervalo $0\leqslant x\leqslant 1$ (se puede considerar que $A>0$).

Examinemos dos casos básicos: 1) $A_1<0$ lo que corresponde al tipo hiperbólico de la ecuación; 2) $A_1=0$, $B_1<0$ lo que corresponde al tipo parabólico de la misma. Para estas condiciones el problema no estacionario puede ser enunciado así: se exige hallar una solución $u(x, t)$ de la ecuación (1) para $0\leqslant x\leqslant 1$ y $t\geqslant 0$ tal, que satisfaga las condiciones iniciales $u(x, t)|_{t=0}=\varphi(x), \frac{du}{dt}|_{t=0}=\psi(x)$ (con ello la segunda condición se da en el caso en que $A_1<0$) y las condiciones de frontera $u(x, t)|_{x=0}=f(t)$, $\alpha\frac{du}{dx}|_{x=1}+\beta\frac{du}{dt}|_{x=1}=\gamma\, u(x, t)_{x=l}$, donde α, β, γ son constantes. Notemos que para $l\to\infty$ la segunda condición de frontera no es necesaria.

Se supone también que $u(x, t)$, $\frac{du}{\partial x}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, que son funciones de t, pueden servir de funciones originales y que las transformadas de la función buscada y sus derivadas tienen la forma

$$\bar{u}(x, p)=\int_0^\infty e^{-pt}u(x, t)\,dt, \quad \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial x}\,dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^\infty ue^{-pt}\,dt=\frac{d\bar{u}}{dx}, \quad \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dt=\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty ue^{-pt}\,dt=\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}.$$

Aquí p se considera solamente como parámetro. De transformadas de $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ sirven

$$\frac{\partial u}{\partial t}\div p\bar{u}-u(x, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\div p^2\bar{u}-pu(x, 0)-\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

o bien, teniendo en cuenta las condiciones iniciales,

$$\frac{\partial u}{\partial t}\div p\bar{u}-\varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\div p^2\bar{u}-p\varphi(x)-\psi(x);$$

las condiciones de frontera son $\bar{u}|_{x=0}=\bar{f}(p)\left[\alpha\frac{d\bar{u}}{dx}+\beta(p\bar{u}-\varphi(x)\right]_{x=l}=$ $=\gamma\bar{u}|_{x=l}$.

De este modo, la solución de la ecuación (1) se reduce a la solución de la ecuación operatoria

$$A\,\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}+B\,\frac{d\bar{u}}{dx}+M\bar{u}+N=0, \tag{2}$$

donde $M=C-A_1p^2+B_1p$, $N=-A_1p\varphi-A_1\psi-B_1\varphi$ (es el parámetro), es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Determinada la transformada de la función buscada $u(x, t)$, con ayuda de la tabla o la fórmula de inversión de Riemann—Mellin se puede encontrar la original.

1086. Los extremos de una cuerda $x=0$ y $x=1$ están sujetados rígidamente. La desviación inicial está definida por la igualdad $u(x, 0)=A\ \text{sen}\,(\pi\,x/l)$, $0\leqslant x\leqslant l$; la velocidad inicial es igual a cero. Hallar la desviación $u(x, t)$ si $t>0$.

Resolución. La ecuación diferencial del problema tiene la forma $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$. Las condiciones iniciales son $u(x, 0)=A\ \text{sen}\,\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=0$; las condiciones de frontera son: $u(0, t)=u(l, t)=0$. Escribimos la ecuación operatoria respectiva

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}\cdot\bar{u}=-pA\cdot\frac{1}{a^2}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{l};$$

condiciones de frontera: $\bar{u}\,|_{x=0}=\bar{u}\,|_{x=l}=0$.

La solución general de la ecuación homogénea tiene la forma

$$\bar{u}=C_1e^{(p/a)\,x}+C_2e^{-(p/a)x},$$

y la solución particular de la ecuación no homogénea la buscamos en la forma

$$\bar{v}=\widetilde{C}_1\cos\frac{\pi x}{l}+\widetilde{C}_2\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{l},$$

o sea,

$$\begin{array}{c|l}
-\dfrac{p^2}{a^2} & \bar{v}=\widetilde{C}_1\cos\dfrac{\pi x}{l}+\widetilde{C}_2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi x}{l}\\
0 & \bar{v}'=-\widetilde{C}_1\cdot\dfrac{\pi}{l}\,\text{sen}\dfrac{\pi x}{l}+\widetilde{C}_2\cdot\dfrac{\pi}{l}\cos\dfrac{\pi x}{l}\\
1 & \bar{v}''=-\widetilde{C}_1\cdot\dfrac{\pi^2}{l^2}\cos\dfrac{\pi x}{l}-\widetilde{C}_2\cdot\dfrac{\pi^2}{l^2}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi x}{l}\\
\hline
\end{array}$$

$$-\frac{pA}{a^2}\,\text{sen}\frac{\pi x}{l}=-\widetilde{C}_2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{l^2}\right)\text{sen}\frac{\pi x}{l}-\widetilde{C}_1\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{l^2}\right)\cos\frac{\pi x}{l}.$$

De aquí, $\widetilde{C}_1=0$, $\widetilde{C}_2=\frac{pA}{p^2+\pi^2a^2/l^2}$. De este modo, la solución general de la ecuación operatoria es

$$\bar{u}(x, p)=C_1e^{(p/a)x}+C_2e^{-(p/a)x}+\frac{Ap}{p^2+a^2\pi^2/l^2}\cdot\text{sen}\,\frac{\pi x}{l}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera, obtenemos $\bar{u}(x, p) = \frac{Ap}{p^2+a^2\pi^2/l^2}$ sen $\frac{\pi x}{l}$. De original para tal transformada sirve la función

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi at}{l} \text{ sen } \frac{\pi x}{l}.$$

1087. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisface las condiciones iniciales y de frontera: $u(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u_0$, $0 < x < \infty$, $t > 0$.

Resolución. Escribimos la ecuación operatoria

$$\frac{d^2\bar{u}(x, p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} \cdot \bar{u}(x, p) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{-x\sqrt{p}/a} + C_2 e^{x\sqrt{p}/a}.$$

Según los datos, las funciones $u(x, t)$ y $\bar{u}(x, p)$ para $x \to \infty$ son acotadas y por eso $C_2 = 0$.

Utilizando la condición de frontera $\bar{u}(x, p)|_{x=0} = u_0/p$, encontramos la constante arbitraria $C_1 = u_0/p$. Entonces $\bar{u} = (u_0/p)\, e^{-x\sqrt{p}/a}$. Valiéndonos de la relación $\frac{1}{p} \; e^{-a\sqrt{p}} \div \text{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, hallamos la función original para la transformada $\bar{u}(x, p)$.

La solución de la ecuación dada tiene la forma

$$u(x, t) = u_0 \cdot \text{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

donde, como es sabido,

$$\text{Erf}\, t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2}\, d\tau = 1 - \text{erf}\, t.$$

Por consiguiente,

$$u(x, t) = u_0 \cdot \text{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{\tau^2}\, d\tau\right).$$

1088. Hallar la solución de la ecuación de conducción del calor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}$, que satisface las condiciones iniciales y de contorno: $u(x, 0) = A$ sen $(n\pi x/1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Resolución. La ecuación operatoria correspondiente a la ecuación dada en derivadas parciales tiene la forma

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 p \cdot \bar{u} = -\alpha^2 A \text{ sen } \frac{n\pi x}{l},$$

y su solución general

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{-\alpha\sqrt{p}x} + C_2 e^{\alpha\sqrt{p}x} + \frac{A}{p + (n^2\pi^2)/(\alpha^2 l^2)} \text{sen } \frac{n\pi x}{l}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera $\bar{u}\,|_{x=0}=\bar{u}\,|_{x=l}=0$, obtenemos $\bar{u}(x,\ p)=\frac{A}{p+(n^2\pi^2)/(\alpha^2 l^2)}\ \text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}$.

La función original de esta solución es $u(x,\ t)=Ae^{-n^2\pi^2 t/(\alpha^2 l^2)}\ \text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}$.

1089. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisface la condición inicial $u(x,\ 0)=0\ (x>0)$ y las condiciones de frontera $u(0,\ t)=0,\ u(h,\ t)=u_0$.

Resolución. Escribimos la ecuación operatoria

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p}{a}\cdot\bar{u}=0,$$

que se debe resolver para las condiciones: $\bar{u}(0,\ t)=0,\ \bar{u}(h,\ t)=u_0/p$. La solución general de la ecuación operatoria la escribimos en la forma

$$\bar{u}(x,\ p)=A\,\text{ch}\,\sqrt{p/a}\,x+B\,\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,x. \tag{*}$$

Utilizando las condiciones de frontera, encontramos las constantes A y B Tenemos

$$A=0,\quad \frac{u_0}{p}=B\,\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,h,\quad \text{o sea,}\quad B=\frac{u_0}{p\cdot\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,h}.$$

Sustituyendo los valores de A y B en la igualdad (*), obtenemos $u=\frac{u_0\,\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,x}{p\,\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,h}$.

Según la fórmula de inversión de Riemann—Mellin nos queda:

$$u(x,\ t)=\frac{u_0}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\,\frac{\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,x}{\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,h}\cdot\frac{dp}{p}. \tag{**}$$

Para calcular la integral determinemos los residuos de la función subintegral. Igualando a cero el denominador y teniendo en cuenta que las raíces deseno hiperbólico son imaginarias puras e iguales a un número múltiplo de π, hallamos:

$$\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,h=0,\quad \sqrt{p_k/a}\,h=ik\pi,\quad p_k=-k^2\pi^2 a/h^2,\quad (k\in N).$$

Todos los k polos son simples, distintos de cero; por eso, aplicando el teorema de Cauchy de los residuos, obtenemos

$$u(x,\ t)=\sum_{(p_k)}\text{res}\,F(p)\,e^{pt},\quad \text{donde}\quad F(p)=\frac{M(p)}{p\cdot N(p)}=\frac{\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,x}{p\cdot\text{sh}\,\sqrt{p/a}\,h},$$

además, la potencia de $M(p)$ no supera la potencia de $N(p)$. Conviene señalar que esta fórmula será válida para un número infinito de puntos singulares aislados que sean franjas simples y tengan el único punto límite de condensación

$p = \infty$. Entonces

$$\frac{M(p)}{pN(p)} \div \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M(p_k)}{p_k \cdot N'(p_k)} e^{p_k t},$$

donde $\frac{M(0)}{N(0)} = \lim_{p \to 0} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p/a}\, x}{\operatorname{sh} \sqrt{p/a}\, h} = \frac{x}{h}$ y $\frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} = \frac{2i \operatorname{sh}(ik\pi/h)}{k\pi \operatorname{ch}(ik\pi)}$.

Expresando las funciones hiperbólicas por medio de las circulaciones, obtenemos

$$\frac{2 \operatorname{sen}(k\pi x/h)}{\pi k \cos(k\pi)} = (-1)^k \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}(k\pi x/\pi)}{k}.$$

Así, pues, la igualdad $(_{**})$ adopta la forma

$$u(x, t) = u_0 \left[\frac{x}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-ak^2\pi^2 t/h^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(k\pi x/h)}{k} \right].$$

1090. Hallar la solución de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \times \times \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, que satisface las condiciones iniciales $u(x, 0) = = A \cos \frac{n\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$ y las condiciones de frontera $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$.

1091. Hallar la solución de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \times \times \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, que satisface las condiciones iniciales $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = B \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$, $0 \leqslant x \leqslant l$ y las condiciones de frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

1092. Hallar la solución de la ecuación de conducción del calor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}$, que satisface las condiciones $u(x, 0) = 0$, $x \geqslant 0$; $u(0, t) = A$, $\lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0$.

Capitulo IX. Métodos de cálculos

§ 1. Solución aproximada de ecuaciones

El problema de encontrar valores aproximados de raíces reales de una ecuación $f(x) = 0$ prevé la *separación* previa *de una raíz*, o sea, la determinación del intervalo en el cual no hay otras raíces de la ecuación dada. Supondremos que la función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es continua al igual que sus derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$, los valores $f(a)$ y $f(b)$ de la función tienen en los extremos del intervalo distintos signos, o sea, $f(a) \cdot f(b) < 0$ y ambas derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ conservan sus signos en todo el intervalo $[a, b]$.

Como de raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ sirven las abscisas de intersección de la curva $y = f(x)$ con el eje Ox, la separación de una raíz se puede realizar gráficamente. En vez de la ecuación $y = f(x)$ se puede tomar la ecuación $y = kf(x)$, donde k es una magnitud constante distinta de cero, ya que las ecuaciones $f(x) = 0$ y $kf(x) = 0$ son equivalentes.

La constante k puede tomarse de modo que las ordenadas de los puntos del gráfico no sean excesivamente grandes o, por el contrario, de modo que el gráfico no esté demasiado próximo al eje Ox. A veces es útil escribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma de $\varphi(x) = \psi(x)$. De raíces reales de la ecuación inicial sirven las abscisas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$.

1. Método de partes proporcionales (de las cuerdas). Sea que se requiere calcular la raíz real de la ecuación $f(x) = 0$, aislada sobre un segmento $[a, b]$. Examinemos el gráfico de la función $y = f(x)$. Sea $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Unimos los puntos del gráfico $A[a; f(a)]$ y $B[b; f(b)]$ por medio de una cuerda. Tomemos por valor aproximado de la raíz buscada la abscisa x_1 del punto de intersección de la cuerda AB con el eje Ox. Este valor aproximado se halla por la fórmula

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)},$$

donde x_1 pertenece al intervalo $]a, b[$. Sea, por ejemplo, $f(x_1) < 0$, entonces por un intervalo nuevo (más estrecho) del aislamiento de la raíz se puede tomar $[x_1, b]$. Uniendo los puntos $A_1[x_1; f(x_1)]$ y $B[b; f(b)]$, obtenemos en el punto de intersección de la cuerda con el eje Ox la segunda aproximación x_2 que se calcula por la fórmula

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)\,f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$

etc. La sucesión de los números $a, x_1, x_2, \ldots$ tiende a la raíz buscada de la ecuación $f(x) = 0$. El cálculo de valores aproximados de las raíces de la ecuación debe efectuarse hasta que dejen de variar aquellas cifras decimales que queremos conservar en la respuesta (o sea, hasta que se alcance el grado prefijado de precisión).

Si $\bar{x}$ es la raíz exacta de la ecuación $f(x) = 0$, aislada sobre el segmento $[a, b]$ y ξ es el valor aproximado de la raíz, determinado por el método de partes proporcionales, entonces la estimación del error de este valor aproximado es la siguiente:

$$|\bar{x}-\xi| < -\frac{f(a)\cdot f(b)}{2}\cdot \max_{[a,\, b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

2. Método de las tangentes (método de Newton). Sea aislada una raíz real de la ecuación de $f(x) = 0$ sobre el segmento $[a, b]$. Supongamos que todas las limitaciones enunciadas anteriormente con respecto a $f(x)$ conservan también ahora su vigor. Tomamos sobre el segmento $[a, b]$ un número x_0 tal que $f(x_0)$ tenga el mismo signo que $f''(x_0)$, o sea $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ (en particular por x_0 puede ser tomado uno de los extremos del segmento $[a, b]$ en el cual se cumpla esta condición). Trazamos en el punto $M_0[x_0; f(x_0)]$ la tangente a la curva $y = f(x)$. Tomamos por valor aproximado de la raíz la abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox. Este valor aproximado de la raíz se halla por la fórmula

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Aplicando este procedimiento una vez más en el punto $M_1[x_1; f(x_1)]$, encontramos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

etc. La sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots$, obtienida de este modo, tiene por límite la raíz buscada.

Para apreciar el error del valor aproximado de la raíz hallada por el método de Newton puede ser utilizada la desigualdad

$$|\bar{x}-\xi| < \frac{[f(\xi)]^2}{2}\cdot \max_{[a,\, b]}\left|\frac{f''(x)}{f'(x)]^3}\right|.$$

3. Método combinado de las partes proporcionales y de las tangentes. Sea que se requiere hallar la raíz real de la ecuación $f(x) = 0$, aislada sobre el segmento $[a, b]$. Supongamos, que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distintos signos y cada una de las derivadas conserva un signo determinado sobre el segmento de aislamiento. Tomamos sobre el segmento $[a, b]$ un punto x_0 tal, que $f(x_0)$ y $f''(x_0)$ (para x perteneciente al intervalo de aislamiento) tengan iguales signos.

Valgámonos de las fórmulas de los métodos de las partes proporcionales y de las tangentes:

$$x_{11} = x_0\, \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; \quad x_{12} = a - \frac{(b-a)\, f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Las magnitudes x_{11} y x_{12} pertenecen al intervalo de aislamiento, además, $f(x_{11})$ y $f(x_{12})$ tienen distintos signos.

Construimos un nuevo par de aproximaciones a la raíz:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})}; \quad x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12}-x_{11})\, f(x_{11})}{f(x_{12})-f(x_{11})}.$$

Los puntos x_{21} y x_{22} están situados sobre el eje numérico entre los puntos x_1 y x_{12}, con ello $f(x_{21})$ y $f(x_{22})$ tienen distintos signos.

Calculamos ahora los valores

$$x_{31} = x_{21} - \frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})}; \quad x_{32} = x_{21} - \frac{(x_{22}-x_{21})\, f(x_{21})}{f(x_{22})-f(x_{21})},$$

etc.

Cada una de las sucesiones

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n1}, \ldots; x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{n2}, \ldots$$

tiende hacia la raíz buscada, además una de las sucesiones es monótona creciente y la otra, monótona decreciente. Sea, por ejemplo, $x_{n1} < \bar{x} < x_{n2}$, entonces $0 < \bar{x} - x_{n-1} < x_{n2} - x_{n1}$. Fijando de antemano un ε suficientemente pequeño, podemos, al aumentar n, alcanzar que se cumpla la desigualdad $x_{n2} - x_{n1} < \varepsilon$; por consiguiente, para este mismo valor de n se cumplirá la desigualdad $\bar{x} - x_{n1} < \varepsilon$. De este modo, x_{n1} es un valor aproximado de la raíz $\bar{x}$, calculado con un error que no supera ε.

Así, por ejemplo, para hallar un valor aproximado de $\bar{x}$ con precisión de hasta 0,001 hace falta determinar n de modo que los valores de x_{n1} y x_{n2} calculados con precisión de hasta 0,001, coincidan.

4. Método de iteraciones. Si la ecuación dada está reducida a la forma $x = \varphi(x)$, donde $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ por doquier sobre un segmento $[a, b]$, en el cual la ecuación inicial tiene una sola raíz, entonces, partiendo de cierto valor inicial de x_0 perteneciente al segmento $[a, b]$ se puede construir la sucesión

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \; \ldots, \quad x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

De límite de esta sucesión sirve la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ sobre el segmento $[a, b]$. El error del valor aproximado x_n de la raíz $\bar{x}$, hallada por el método de iteraciones se estima por la desigualdad

$$|\bar{x} - x_n| < \frac{r}{1-r} |x_n - x_{n-1}|.$$

Para encontrar un valor aproximado de la raíz con un error que no exceda de ε, es suficiente determinar n de modo que se cumpla la desigualdad

$$x_n - x_{n-1}| < \frac{r-1}{r} \varepsilon.$$

5. Método de pruebas. El intervalo de aislamiento de una raíz real siempre se puede disminuir dividiéndolo, por ejemplo, por la mitad y determinando dn este modo cuál es la parte del intervalo inicial en cuyas fronteras la función $f(x)$ cambia de signo. Luego el intervalo obtenido vuelve a dividirse en dos partes, etc. Tal proceso se realiza hasta que dejen de variar las cifras decimales que se conservan en la respuesta.

1093. Hallar con ayuda del método de las partes proporcionales la raíz positiva de la ecuación $x^4 - 2x - 4 = 0$ con precisión de hasta 0,01.

Resolución. La raíz positiva se encuentra en el intervalo $]1; 1{,}7[$, ya que $f(1) = -5 < 0$ y $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$.

Determinamos el primer valor aproximado de la raíz:

$$x_1 = 1 - \frac{(1{,}7 - 1) \cdot f(1)}{f(1{,}7) - f(1)} = 1{,}588.$$

Como $f(1{,}588) = -0{,}817 < 0$, entonces, volvemos a aplicar el método de las partes proporcionales al intervalo $]1{,}588; 1{,}7[$:

$$x_2 = 1{,}588 - \frac{(1{,}7 - 1{,}588) \cdot f(1{,}588)}{f(1{,}7) - f(1{,}588)} = 1{,}639; \quad f(1.639) = -0{,}051 < 0.$$

Hallamos el tercer valor aproximado:

$$x_3=1{,}639-\frac{(1{,}7-1{,}639)\cdot f(1{,}639)}{f(1{,}7)-f(1{,}639)}=1{,}642; \quad f(1{,}642)=-0{,}016<0.$$

Determinamos el cuarto valor aproximado:

$$x_4=1\ 642-\frac{(1{,}7-1{,}642)\cdot f(1{,}642)}{f(1{,}7)-f(1{,}642)}=1{,}643; \quad f(1{,}643)=0\ 004>0$$

Por consiguiente, con precisión hasta 0,01, la raíz buscada es igual a 1,64.

1094. Resolver el problema precedente por el método de tangentes

Resolución. Aquí $f(x)=x^4-2x-4$, $f'(x)=4x^3-2$, $f''(x)=12x^2$. Puesto que $f(x)$ y $f''(x)$ para $x_0=1{,}7$ tienen el mismo signo, a saber $f(1{,}7)=$ $=0{,}952>0$ y $f''(1{,}7)>0$, utilicemos la fórmula $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$, donde $f'(1{,}7)=4\cdot 1{,}7^3-2=17{,}652$. Entonces

$$x_1=1{,}7-0{,}952/17{,}652=1{,}646.$$

Volvemos a aplicar el procedimiento de tangentes. Tenemos $x_2=x_1-f(x_1)/$ $f'(x_1)$, donde $f(x_1)=f(1{,}646)=0{,}048$, $f'(1{,}646)=15{,}838$; de suerte que

$$x_2=1{,}646-0{,}048/15{,}838=1{,}643.$$

De un modo análogo hallamos $f(1{,}643)=0{,}004$; $f'(1{,}643)=15{,}740$, o sea,

$$x_3=x_2-f(x_2)/f'(x_2)=1{,}643-0{,}003/15{,}740=1{,}6427.$$

Por lo tanto, la raíz buscada, con precisión de hasta 0,01, es igual a 1,64.

1095. Valiéndose del método combinado de las partes proporcionales y de las tangentes, hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $x^3+x^2-11=0$, aislada en el intervalo $]1,\ 2[$, con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Tenemos $f(x)=x^3+x^2-11$, $f'(x)=3x^2+2x$, $f''(x)=$ $=6x+2$. En el intervalo indicado $f''(x)>0$, por eso, aplicando el método de las tangentes, tomemos como primera aproximación $x_0=2$, ya que $f(2)=$ $=1>0$;

$$x_{11}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{1}{16}=1{,}9375\approx 1{,}94;$$

$$x_{12}=a-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}=1-\frac{(2-1)\,(-9)}{1-(-9)}=1+\frac{9}{10}=1{,}9.$$

La raíz buscada pertenece al intervalo $]1{,}9;\ 1{,}94[$; tenemos $f(1{,}9)=-0{,}531$, $f(1{,}94)=0{,}065$; $f'(1{,}94)=15{,}172$;

$$x_{21}=1{,}94-\frac{0{,}065}{15{,}172}=1{,}936; \quad x_{22}=1{,}9-\frac{0{,}04\cdot(-0{,}531)}{0{,}065+0{,}531}=1{,}936.$$

Como los valores x_{21} y x_{22} calculados con precisión de hasta 0,001 han coincidido, entonces el valor aproximado de la raíz $\overline{x}$, determinado con precisión de hasta 0,001, es igual a 1,936.

1096. Valiéndose del método de iteraciones, hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $2\log x-x=0$ con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Determinamos el intervalo de aislamiento de la raíz real de la ecuación. Presentamos la ecuación dada en la forma $\log x = -x + 2$ y construimos los gráficos de las funciones $y = \log x$ e $y = -x + 2$. La abscisa del punto M en que se intersecan estos gráficos se encuentra en el intervalo [1, 2], por eso como valor inicial de $\bar{x}$ se puede tomar $x_0 = 1$ (fig. 69). Escribimos la

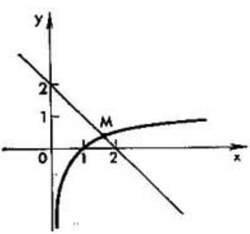

Fig. 69

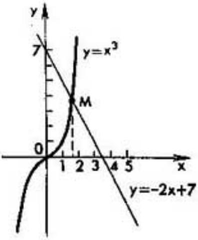

Fig. 70

ecuación inicial en la forma $x = 2 - \log x$. Aquí $\varphi(x) = 2 - \log x$, $\varphi'(x) = -(\log e)/x$, o sea, $|\varphi'(x)| < 1$ en el intervalo [1, 2] y por eso el método de iteraciones es aplicable. Determinamos ahora el primer valor aproximado:

$$x_1 = 2 - \log x_0 = 2 - \log 1 = 2.$$

Hallamos la segunda aproximación y las sucesivas:

$$x_2 = 2 - \log x_1 = 2 - \log 2 = 2 - 0{,}3010 = 1{,}6990;$$
$$x_3 = 2 - \log 1{,}6990 = 2 - 0{,}2302 = 1{,}7698;$$
$$x_4 = 2 - \log 1{,}7698 = 2 - 0{,}2480 = 1{,}7520;$$
$$x_5 = 2 - \log 1{,}7520 = 2 - 0{,}2435 = 1{,}7565;$$
$$x_6 = 2 - \log 1{,}7565 = 2 - 0{,}2445 = 1{,}7555;$$
$$x_7 = 2 - \log 1{,}7555 = 2 - 0{,}2444 = 1{,}7556.$$

De este modo, raíz buscada es $x \cong 1{,}755$.

1097. Resolver con ayuda del método de pruebas la ecuación $x^3 + 2x - 7 = 0$ con precisión de hasta 0,01.

Resolución. El intervalo de aislamiento de la raíz real se puede determinar gráficamente, construyendo el gráfico de las funciones $y = x^3$ e $y = -2x + 7$ (fig. 70).

El único punto de intersección de los gráficos se encuentra en el intervalo]1, 2[. Por consiguiente, la raíz buscada está comprendida en este intervalo, o sea, se puede tomar $a = 1$, $b = 2$. Hallamos los valores de la función sobre los extremos del intervalo: $f(1) = -4 < 0$; $f(2) = 5 > 0$. Dividiendo el intervalo]1, 2[por la mitad, obtenemos $c_1 = (a + b)/2 = (1 + 2)/2 = 1{,}5$ y calculamos $f(c_1) = f(1{,}5) = -0{,}625 < 0$. Por consiguiente, la raíz buscada está en el intervalo]1,5; 2[.

Tomemos $c_2 = 1{,}7$; $f(c_2) = f(1{,}7) = 1{,}313 > 0$. Vemos que la raíz buscada se halla en el intervalo]1,5; 1,7[. Tomemos ahora $c_3 = 1{,}6$; $f(c_3) = f(1{,}6) = 0{,}296 > 0$. Como resultado se logró achicar el intervalo de aislamiento y la raíz buscada se encuentra en el intervalo]1,5; 1,6[.

Continuando este proceso, tenemos

$c_4 = 1{,}55$; $f(c_4) = f(1{,}55) = -0{,}176 < 0$; intervalo de aislamiento $]1{,}55;\ 1{,}6[$;

$c_5 = 1{,}57$; $f(c_5) = f(1{,}57) = 0{,}010 > 0$; intervalo de aislamiento $]1{,}55;\ 1{,}57[$;

$c_6 = 1{,}56$; $f(c_6) = f(1{,}56) = -0{,}084 < 0$; intervalo de aislamiento $]1{,}56;\ 1{,}57[$;

$c_7 = 1{,}565$; $f(c_7) = f(1{,}565) = -0{,}037 < 0$; intervalo de aislamiento $]1{,}565;\ 1{,}57[$;

$c_8 = 1{,}568$; $f(c_8) = f(1{,}568) = -0{,}009 < 0$.

De este modo, hemos obtenido el intervalo $]1{,}568;\ 1{,}57[$. De aquí se ve que con precisión de hasta 0,01 la raíz buscada es $x = 1{,}57$.

1098. Determinar gráficamente los intervalos de aislamiento de las raíces reales de la ecuación $x^3 = 9x^2 + 18x - 1 = 0$.

1099. Determinar gráficamente los intervalos de aislamiento de las raíces reales de la ecuación $x^3 - 12x + 1 = 0$.

Valiéndose del método de las partes proporcionales y de las tangentes, resolver con precisión de hasta 0,01 las ecuaciones:

1100. $x^4 + 3x - 20 = 0$.

1101. $x^3 = 2x - 5 = 0$.

1102. $x^4 - 3x + 1 = 0$.

1103. $x^3 + 3x + 5 = 0$.

1104. $x^4 + 5x - 7 = 0$ (aplicar el método combinado de las partes proporcionales y de las tangentes).

Valiéndose del método de iteraciones, resolver con precisión de hasta 0,01 las ecuaciones:

1105. $x^3 - 12x - 5 = 0$.

1106. $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$.

Por medio del método de pruebas, dividiendo en partes el intervalo de aislamiento de la raíz, resolver con precisión de hasta 0,01 las ecuaciones:

1107. $x + e^x = 0$.

1108. $x^5 - x - 2 = 0$.

1109. Aplicando dos veces el método de las partes proporcionales, hallar el valor aproximado de la raíz real de la ecuación $x^3 - 10x + 5 = 0$, aislada en el intervalo $[0;\ 0{,}6]$. Calcular los valores aproximados de x_1 y x_2 con dos cifras decimales. Estimar el error del valor aproximado de x_2.

Resolución. Hallamos

$$f(x) = x^3 - 10x + 5, \quad f'(x) = 3x^2 - 10, \quad f''(x) = 6x;$$
$$f(0) = 5; \quad f(0{,}6) = 0{,}216 - 6 + 5 = -0{,}784;$$

$$x_1 = 0 - \frac{0{,}6 \cdot 5}{-0{,}784 - 5} = \frac{3}{5{,}784} = 0{,}52; \quad f(0{,}52) = 0\ 141 - 5\ 2 + 5 = -0{,}059 < 0.$$

El nuevo intervalo de aislamiento es $]0;\ 0{,}52[$. Encontramos la segunda aproximación:

$$x_2 = 0 - \frac{0{,}52 \cdot 5}{-0{,}059 - 5} = \frac{2{,}6}{5{,}059} = 0{,}51$$

Vamos a estimar el error de este valor aproximado, utilizando la fórmula

$$|\bar{x}-x_2| < -\frac{f(a)\,f(b)}{2}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|,$$

Poniendo $a=0$, $b=0{,}52$, tenemos

$$|\bar{x}-x_2| < \frac{5\cdot 0{,}059}{2}\cdot\max_{[0;\;0{,}52]}\left|\frac{6x}{(3x^2-10)^3}\right|.$$

En el intervalo indicado $\left|\frac{6x}{(3x^2-19)^3}\right|=\frac{6x}{(10-3x^2)^3}$. Esta función toma el valor máximo cuando $x=0{,}52$. Por consiguiente,

$$|\bar{x}-x_2| < 0{,}01475\cdot\frac{3{,}12}{(10-0{,}8112)^3}.$$

Así, pues, obtenemos la estimación del valor aproximado de la raíz: $|\bar{x}-0{,}51| < 0{,}0006$. De aquí resulta que en el valor aproximado de la raíz $x_2=0{,}51$ ambos decimales son justos.

1110. Aplicando dos veces el método de las tangentes, hallar el valor aproximado de la raíz real de la ecuación $x^4-8x+1=0$, aislada en el intervalo $[1{,}6;\,2]$. Calcular los valores aproximados de x_1 y x_2 con dos cifras decimales. Estimar el error del valor aproximado de x_2.

Resolución. Hallamos $f(x)=x^4-8x+1$, $f'(x)=4x^3-8$, $f''(x)=12x^2$; $f(1{,}6)=-5{,}246$, $f(2)=1$; $f''(x)>0$, $f(2)=1>0$, por eso tomamos $x_0=2$. Utilizamos la fórmula

$$x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0),\ \text{o sea},\ x_1=2-1/24=1{,}96.$$

Determinamos la segunda aproximación. Nos resulta $f(x_1)=1{,}96^4-8\cdot1{,}96+1=0{,}09$, $f'(x_1)=4\cdot1{,}96^3-8=22{,}12$; por lo tanto,

$$x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1),\ \text{o sea},\ x_2=1{,}96-0{,}09/22{,}12=1{,}956\approx1{,}96.$$

Determinemos el error del valor aproximado hallado de la raíz:

$$|\bar{x}-x_2| < \frac{[f(x_2)]^2}{2}\cdot\max_{[1,\,6;\;2]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

En el intervalo $]1{,}6;\,2[$ tenemos

$$\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|=\left|\frac{12x^2}{(4x^3-8)^3}\right|=\frac{3x^2}{16\,(x^3-2)^3}.$$

Dentro del intervalo $[1{,}6;\,2]$ la función $\frac{x^2}{(x^3-2^3)}$ no tiene extremos. Ella alcanza su valor máximo cuando $x=1{,}6$:

$$|\bar{x}-1{,}96| < \frac{0{,}09^2}{2}\cdot\frac{3{,}16^2}{16\,(1{,}6^3-2)^3},$$

o sea, $|\bar{x}-1{,}96| < 0{,}0002$; por consiguiente, en el valor aproximado de la raíz igual a $1{,}96$ todas las cifras son correctas.

1111. **Aplicando cinco veces el método de iteraciones, hallar la raíz aproximada de la ecuación $2x - \cos x = 0$, aislada en el intervalo $[0;\ 0{,}5]$, con precisión de hasta tres cifras significativas.**

Resolución. Escribimos la ecuación dada en la forma $x = 0{,}5 \cos x$; por consiguiente, $\varphi(x) = 0{,}5 \cos x$, $\varphi'(x) = -0{,}5 \operatorname{sen} x$. En el intervalo $[0;\ 0{,}5]$ tenemos $|\varphi'(x)| < 0{,}5 = r < 1$. Tomamos $x_0 = 0{,}5$, $x_1 = 0{,}5 \cos x_0$, $x_2 = 0{,}5 \cos x_1$, etc. Realizamos los cálculos:
$x_1 = 0{,}5 \cos 0{,}5 = 0{,}5 \cos 28°41' = 0{,}4386$; $x_2 = 0{,}5 \cos 0{,}4386 = 0{,}5 \cos 25°08' = 0{,}4527$; $x_3 = 0{,}5 \cos 0{,}4527 = 0{,}5 \cos 25°56' = 0{,}4496$; $x_4 = 0{,}5 \cos 25°46' = 0{,}4503$; $x_5 = 0{,}5 \cos 25°48' = 0{,}4502$.

Calculamos la estimación del error aplicando la fórmula

$$|\bar{x} - x_5| < \frac{1}{1-r} |x_5 - x_4|.$$

Tenemos
$|\bar{x} - 0{,}4502| < |0{,}4502 - 0{,}4503|$, o sea, $|\bar{x} - 0{,}4502| < 0{,}0001$, o bien $0{,}4501 < \bar{x} < 0{,}4503$.

Por lo tanto, con precisión de hasta tres cifras significativas, el valor aproximado de la raíz es igual a 0,450.

6. Generalización del método de Newton para la solución aproximada de ecuaciones.

a) Método de Chébishev. Supongamos que se exige hallar la raíz real de la ecuación $f(x) = 0$, aislada en el intervalo $]a, b[$. La función $f(x)$ se supone continua junto con las derivadas de n-ésimo orden inclusive, además, $f'(x) \neq 0$ en el intervalo $]a, b[$. Examinemos la curva $x = \xi + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_n y^n$. Seleccionamos los parámetros $\xi, A_1, A_2, \ldots, A_n$, de modo que las curvas $y = f(x)$ y $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$ en el punto con abscisa x_0 del intervalo $]a, b[$ tengan una tangencia de n-ésimo orden. Recordemos (véase la parte I, cap. VII, § 4) que las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ en el punto con abscisa x_0 tienen *tangencia de n-ésimo orden* si
$f(x_0) = \varphi(x_0)$, $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0)$.
El punto de tangencia de n-ésimo orden es geométricamente la posición límite de $n + 1$ puntos de intersección de las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$, al tender estos puntos de intersección hacia el punto con abscisa x_0. En el caso dado, la curva $y = \varphi(x)$ se define implícitamente por la ecuación $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$.

Seleccionando de tal modo los parámetros $\xi, A_1, A_2, \ldots, A_n$, por valor aproximado de la raíz buscada, se puede tomar la abscisa del punto de intersección de la curva $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$ con el eje Ox, o sea, el número ξ.

Si $n = 1$, entonces $\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (fórmula del método de Newton).

Si $n = 2$, entonces

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 \cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3}. \tag{1}$$

Si $n = 3$, entonces

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 \cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3} - \frac{[f(x_0)]^3}{3!} \frac{3[f''(x_0)]^2 - f'(x_0) \cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5}. \tag{2}$$

Si $n=4$, entonces

$$\xi=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{[f(x_0)]^2\cdot f''(x_0)}{2![f'(x_0)]^3}-\frac{[f(x_0)]^3}{3!}\frac{3[f''(x_0)]^2-f'(x_0)\cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5}-$$

$$-\frac{[f(x_0)]^4}{4!}\frac{[f'(x_0)]^2\cdot f^{\mathrm{IV}}(x_0)-10f'(x_0)f''(x_0)f'''(x_0)+15[f''(x_0)]^3}{[f'(x_0)]^7}. \qquad (3)$$

Demos *las estimaciones del error* de los valores de las raíces halladas por las fórmulas (1) y (2).

Para la fórmula (1) cuando $n=2$

$$|\bar{x}-\xi|<\frac{[f(x_0)]^3}{3!}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}\right|.$$

Para la fórmula (2) cuando $n=3$

$$|\bar{x}-\xi|<\frac{[f(x_0)]^4}{4!}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{[f'(x)]^2 f^{\mathrm{IV}}(x)-10f'(x)f''(x)f'''(x)+15[f''(x)]^3)}{[f'(x)]^7}\right|.$$

b) Para determinar la raíz real de la ecuación $f(x)=0$, aislada en el intervalo $]a, b[$, se examina la curva

$$y=\frac{x-\xi_n}{A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_{n-1}(x-x_0)^{n-1}} \qquad (3)$$

que tiene con la curva $y=f(x)$, en el punto con abscisa x_0 $(a<x_0<b)$, una tangencia de n-ésimo orden. Tomamos por valor aproximado de la raíz la abscisa del punto de intersección de esta curva con el eje Ox, o sea, ξ_n.

De la condición de la tangencia hallamos este valor aproximado:

$$\xi_n=x_0-b_0\cdot\frac{D_{n-1}}{D_n}, \qquad (4)$$

donde

$$D_n=\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0\\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots 0 & 0\\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \ldots b_1 & b_0\\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots b_2 & b_1 \end{vmatrix},$$

$$b_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n),\quad b_0=f(x_0).$$

Si $n=1$, la ecuación (3) define la recta $y=\frac{1}{A_0}(x-\xi)$ y para el valor aproximado de la raíz se obtiene la fórmula de Newton.

De este modo, la fórmula (4) generaliza el método de Newton para la solución aproximada de ecuaciones.

Si $n=2$, entonces

$$\xi_2=x_0-\frac{b_0b_1}{b_1^2-b_0b_2}. \qquad (5)$$

Si $n=3$, entonces

$$\xi_3 = x_0 - \frac{(b_1^2 - b_0 b_2)\, b_0}{\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

1112. Hallar el valor aproximado de $\sqrt{3}$ con precisión de hasta 0,0000001.

Resolución. Aplicamos a la ecuación $x^2 - 3 = 0$ la fórmula de Chébishev para $n = 4$. Tomamos $x_0 = 1{,}7$; entonces $f(x) = x^2 - 3$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$, $f^{IV}(x) = 0$, $f(1{,}7) = -0{,}11$, $f'(1{,}7) = 3{,}4$, $f''(1{,}7) = 2$, $f'''(1{,}7) = 0$, $f^{IV}(1{,}7) = 0$. Por consiguiente,

$$\xi = 1{,}7 + \frac{0{,}11}{3{,}4} - \frac{0{,}11^2 \cdot 2}{2!\,3{,}4^3} + \frac{0{,}11^3}{3!} \cdot \frac{12}{3{,}4^5} - \frac{0{,}11^4}{4!} \cdot \frac{120}{3{,}4^7} =$$

$= 1{,}7 + 0{,}323529 - 0{,}0003078 + 0{,}0000058 - 0{,}0000001 = 1{,}7320508$.
Como $f(1{,}7320508) < 0$, pero $f(1{,}7320509) > 0$, en el valor aproximado de la raíz $\xi = 1{,}7320508$ todas las cifras son correctas.

1113. Hallar el valor aproximado de la raíz real de la ecuación $2x^3 + 2x - 7 = 0$ con precisión de hasta 0,000001.

Resolución. Tenemos $f(x) = 2x^3 + 2x - 7$, $f'(x) = 6x^2 + 2 > 0$; $f(x)$ es una función creciente; $f(1{,}3) = 4{,}394 + 2{,}6 - 7 = -0{,}006 < 0$, $f(1{,}4) = 5{,}488 + 2{,}8 - 7 = 1{,}288 > 0$. Por consiguiente, en el intervalo $]1{,}3;\ 1{,}4[$ se tiene la única raíz real de la ecuación dada.

Tomamos $x_0 = 1{,}3$. Utilizamos la fórmula de Chébishev para $n = 2$; encontramos $f(x) = 2x^3 + 2x - 7$, $f'(x) = 6x^2 + 2$, $f''(x) = 12x$; $f(1{,}3) = -0{,}006$, $f'(1{,}3) = 12{,}14$, $f''(1{,}3) = 15{,}6$; por consiguiente,

$$\xi = 1{,}3 + \frac{0{,}006}{12{,}14} - \frac{0{,}000036}{2} \cdot \frac{15{,}6}{1789{,}1883} = 1{,}3 + 0{,}0004942 - 0{,}0000002 = 1{,}300494;$$

$$f(1{,}300494) = 4{,}399009 + 2{,}600988 - 7 = -0{,}000003 < 0,$$
$$f(1{,}300495) = 4{,}399021 + 2{,}600990 - 7 = 0{,}000011 > 0.$$

Por lo tanto, todas las cifras del valor aproximado de la raíz $\xi = 1{,}300494$ son correctas.

1114. Valiéndose de la fórmula de Chébishev, hallar el valor aproximado de $\sqrt[3]{5}$ con precisión de hasta 0,00001. Poner $n = 3$.

1115. Tomando en la fórmula de Chébishev $n = 2$, calcular la raíz real de la ecuación $3x^5 + 6x - 16 = 0$ con precisión de hasta 0,00001.

1116. Hallar el valor aproximado de $\sqrt{2}$ con precisión de hasta, 0,00001.

Resolución. Pongamos $f(x) = x^2 - 2$. Aplicamos la fórmula (6) tomando $x_0 = 1{,}4$. Entonces $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$, $b_0 = f(1{,}4) = -0{,}04$, $b_1 = f'(1{,}4) = 2{,}8$, $b_2 = (1/2)\, f''(1{,}4) = (1/2) \cdot 2 = 1$,

$b_3 = f'''(1,4) = 0$. Por consiguiente,

$$\xi_3 = 1,4 + \frac{(7,84+0,04)\cdot 0,04}{\begin{vmatrix} 2,8 & -0,04 & 0 \\ 1 & 2,8 & -0,04 \\ 0 & 1 & 2,8 \end{vmatrix}} = 1,4 + \frac{7,88\cdot 0,04}{21,952+0,224} =$$

$$= 1,4 + \frac{0,3152}{22,176} = 1,4 + 0,01421 = 1,41421.$$

Todas las cifras decimales del valor aproximado de la raíz son correctas.

1117. Tomando $n = 2$, hallar el valor aproximado de la raíz positiva de la ecuación $x^3 + x^2 - 4 = 0$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Hacemos $x_0 = 1,3$. Tenemos: $f(x) = x^3 + x^2 - 4$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f''(x) = 6x + 2$, $b_0 = f(1,3) = -0,113$, $b_1 = f'(1,3) = 7,67$, $b_2 = (1/2)\cdot f''(1,3) = (1/2)\cdot 9,8 = 4,9$. Entonces

$$\xi_2 = 1,3 + \frac{7,67\ 0,113}{7,67^2 + 0,113\cdot 4,9} = 1,3 + \frac{0,86671}{59,3826} = 1,3146.$$

Todas las cifras decimales son correctas.

1118. Tomando $n = 2$, hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $x + \ln x = 3$ con precisión de hasta 0,001.

1119. Valiéndose de la fórmula (6), hallar el valor aproximado de $\sqrt[5]{5}$ con precisión de hasta 0,00001.

1120. Valiéndose de la fórmula (5) calcular la raíz negativa de la ecuación $5x^6 - 5x - 47,071 = 0$ con precisión de hasta 0,0001.

§ 2 Interpolación

1. Polinomio de interpolación de Langrange. Sea dada la tabla de valores

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Se requiere escribir un polinomio $y = f(x)$ de grado $m \leqslant n - 1$ que tome los valores dados y_i para los valores correspondientes de x_i, o sea, $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En otras palabras, el gráfico de este polinomio debe pasar por n puntos $M_i(x_i; y_i)$.

Designemos por

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$$

un polinomio auxiliar de grado n en el cual x_i son los valores del argumento dados en la tabla. Entonces tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \frac{y_1\cdot\varphi(x)}{(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} +$$

$$+\frac{y_2\cdot\varphi(x)}{(x-x_2)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\,\dots\,(x_2-x_n)}+\dots$$

$$\dots+\frac{y_n\cdot\varphi(x)}{(x-x_n)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\,\dots\,(x_n-x_{n-1})},$$

o bien

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\cdot\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)}.$$

Este precisamente es *el polinomio de interpolación de Lagrange.*

1121. Escribir el polinomio de Lagrange para la siguiente tabla de valores

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Resolución. El polinomio auxiliar tiene la forma $\varphi(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Calculamos sucesivamente $\varphi'(x)$ para los valores dados de x:

$\varphi'(x)=(x-2)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-3)(x-4)+$ $+(x-1)(x-2)(x-4)+(x-1)(x-2)(x-3)$; $\varphi'(1)=-6$, $\varphi'(2)=$ $=2$, $\varphi'(3)=-2$, $\varphi'(4)=6$.

Entonces

$$f(x)=\frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4)+$$
$$+\frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)=x+1.$$

De este modo, en el caso dado el polinomio de interpolación es la función lineal $f(x)=x+1$.

1122. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1).

Resolución. El polinomio auxiliar tiene la forma $\varphi(x)=(x-2)(x-4)\times$ $\times(x-6)(x-8)(x-10)$. Encontramos

$$\varphi'(x)=(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)+(x-2)(x-6)(x-8)\times$$
$$\times(x-10)+(x-2)(x-4)(x-8)(x-10)+(x-2)(x-4)(x-6)\times$$
$$\times(x-10)+(x-2)(x-4)(x-6)(x-8);$$

$\varphi'(2)=384$, $\varphi'(4)=-96$, $\varphi'(6)=64$, $\varphi'(8)=-96$, $\varphi'(10)=384$.

Entonces

$$f(x)=\frac{0}{384}(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)+\frac{3}{-96}(x-2)(x-6)\times$$
$$\times(x-8)(x-10)+\frac{8}{64}(x-2)(x-4)(x-8)(x-10)-$$

$$-\frac{6}{96}(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)+\frac{0}{384}(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)=$$

$$=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640).$$

Por consiguiente, la buscada es la parábola de cuarto orden

$$y=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640).$$

1123. Se dan los puntos (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Escribir la ecuación del polinomio que toma los valores indicados para los valores dados del argumento.

1124. Escribir el polinomio que toma los valores dados en la tabla.

x	1	3	4	6
y	−7	5	8	14

1125. Escribir el polinomio cuyo gráfico pasa por los puntos (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

2. Fórmula de interpolación de Newton. Sean y_0, y, y_2, ... los valores de cierta función $y=f(x)$ que corresponden a valores equidistantes del argumento x_0, x_1, x_2, ... (o sea, $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k=\text{const}$).

Introduzcamos las designaciones:

$$y_1-y_0=\Delta y_0,\ y_2-y_1=\Delta y_1,\ \ldots,\ y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1},\ \text{o sea,}$$

las diferencias de primer orden de la función dada.

$\Delta y_1-\Delta y_0=\Delta^2 y_0$, $\Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1$, ..., o sea, las diferencias de segundo orden;

$\Delta^n y_1-\Delta^n y_0=\Delta^{n+1}y_0$, $\Delta^n y_2-\Delta^n y_1=\Delta^{n+1}y_1$, ..., o sea, las diferencias de orden $(n+1)$.

Efectuando las sustituciones sucesivas, obtenemos

$$\Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0,\qquad \Delta^3 y_0=y_3-3y_2+3y_1-y_0,\ \ldots,$$

$$\Delta^n y_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot y_{n-k}.$$

Del modo semejante obtenemos:

$$y_1=y_0+\Delta y_0,\quad y_2=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0,\quad y_3=y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0,\ \ldots,$$

$$y_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k y_0=(1+\Delta)^n\cdot y_0=y_0+n\Delta y_0+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\Delta^n y_0.\qquad (1)$$

Escribimos la tabla de diferencias:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
x_1 & y_1 & \Delta y_0 & & & \\
 & & & \Delta^2 y_0 & & \\
x_2 & y_2 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
 & & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\
x_3 & y_3 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
 & & & \Delta^2 y_2 & & \\
x_4 & y_4 & \Delta y_3 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Si en la fórmula (1) se supone que n no es sólo un número entero y positivo sino que puede ser un número cualquiera ($n = t$), entonces obtenemos *la fórmula de interpolación de Newton*:

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^t y_0. \qquad (2)$$

Hemos obtenido tal función de t que para $t = 0$ se convierte en y_0, para $t = 1$ en y_1, para $t = 2$ en y_2, etc. Puesto que el valor sucesivo del argumento x para el paso h se determina por la fórmula $x_n = x_0 + nh$, luego $n = (x_n - x_0)/h$. Entonces, haciendo $x = x_0 + th$, o sea, $t = (x - x_0)/h$, reducimos la fórmula (1) al aspecto

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots \qquad (3)$$

1126. De la tabla hallar el valor de y para $x = 3{,}1$, valiéndose

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

de la fórmula de interpolación de Newton.

Resolución. Componemos la tabla de las diferencias

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3	4		
2	7	6	2	
3	13	8	2	0
4	21	10	2	0
5	31	12	2	0
6	43	14	2	0
7	57			

Aquí $x_0 = 3$, $x = 3{,}1$, $h = 1$. Entonces $t = (x - x_0)/h = (3{,}1 - 3)/1 = 0{,}1$. Escribimos el polinomio de interpolación de Newton para este caso:

$$y = y_0 + t\cdot\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\,\Delta^2 y_0,$$

o bien,

$$y = 13 + 0{,}1\cdot 8 + \frac{0{,}1\,(0{,}1-1)}{2}\cdot 2 = 13{,}71.$$

Por consiguiente, cuando $x = 3{,}1$ e $y = 13{,}71$, el polinomio de interpolación para esta tabla tiene la forma

$$y = 3 + (x-1)\cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\cdot 2 = x^2 + x + 1.$$

1127. Se dan los logaritmos decimales de los números: $\log 2{,}0 = 0{,}30103$, $\log 2{,}1 = 0{,}32222$, $\log 2{,}2 = 0{,}34242$, $\log 2{,}3 = 0{,}36173$, $\log 2{,}4 = 0{,}38021$, $\log 2{,}5 = 0{,}39794$. Valiéndose de la fórmula de interpolación de Newton hallar $\log 2{,}03$.

Resolución. Componemos la tabla de las diferencias:

x	$\log x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
2,0	0,30103	2119	−99	10	−4	6
2,1	0,32222	2020	−89	6	2	
2,2	0,34242	1931	−83	8		
2,3	0,36173	1848	−75			
2,4	0,38021	1773				
2,5	0,39794					

Aquí $x_0 = 2{,}0$, $x = 2{,}03$, $h = 0{,}1$. Entonces $t = (x - x_0)/h = (2{,}03 - 2{,}0)/0{,}1 = 0{,}3$. De ello

$$y = y_0 + t\cdot\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\,\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\,\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\,\Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\,\Delta^5 y_0 =$$

$$= 0{,}30103 + 0{,}3\cdot 0{,}01219 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}00099 +$$

$$+\frac{1}{6}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 1{,}7\cdot 0{,}00010 + \frac{1}{24}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 1{,}7\cdot 2{,}7\cdot 0{,}00004 +$$

$$+\frac{1}{120}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 1{,}7\cdot 2{,}7\cdot 3{,}7\cdot 0{,}00006 = 0{,}30750.$$

De este modo, $\log 2{,}03 = 0{,}30750$. La tabla de logaritmos con cinco decimales da el mismo resultado.

1128. Se dan los logaritmos con cinco decimales de los números de 4 a 10 cada dos unidades. Valiéndose de la fórmula de interpolación de Newton, calcular los logaritmos con cinco decimales de los números de 6,5 a 7,0, cada 0,1.

1129. Conociendo los cuadrados de los números 5, 6, 7, 8, hallar el cuadrado del número 6,25.

1130. Escribir el polinomio de interpolación de Newton para la función definida por la tabla

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

§ 3. Cálculo aproximado de integrales definidas

Si $f(x)$ es un función continua y derivable un número suficiente de veces sobre el segmento $[a, b]$ y $h = (b-a)/n$, $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $y_k = f(x_k)$, entonces tienen lugar las fórmulas siguientes para el cálculo aproximado de las integrales definidas.

Fórmulas de los rectángulos

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n \tag{1}$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + R_n; \tag{2}$$

el error límite absoluto es

$$R_n \leqslant \frac{h}{2}(b-a)M_1, \text{ donde } M_1 = \max_{[a,\, b]} |f'(x)|. \tag{3}$$

Fórmula de los trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n; \tag{4}$$

el error límite absoluto es

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)M_2, \text{ donde } M_2 = \max_{[a,\, b]} |f''(x)| \tag{5}$$

(el valor exacto del error $\delta_1 = -(h^2/12)(b-a)f''(c)$, donde $a < c < b$);

Fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2})] + R_n; \tag{6}$$

el error límite absoluto es

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_4, \quad \text{donde} \quad M_4 = \max_{[a,\,b]} |f^{\mathrm{IV}}(x)| \tag{7}$$

(el valor exacto del error $\delta_s = -(h^4/180)(b-a)f^{\mathrm{IV}}(c)$, donde $a < c < b$).

Cuando la determinación de la cuarta derivada de la función subintegral es dificultosa, para estimar el error del cálculo de la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ por la fórmula de Simpson se puede emplear el procedimiento siguiente.

Haciendo $n = 4k$, se calcula el valor aproximado de la integral dada por la fórmula de Simpson para el paso $h = (b-a)/(4k)$; supongamos que el valor hallado de la integral es I_1; luego el paso h se dobla y el cálculo con ayuda de la fórmula de Simpson se efectúa para el paso $h_1 = (b-a)/(2k)$; supongamos que el valor hallado de la integral es I_2; el error del segundo cálculo es, aproximadamente, 16 veces mayor que el error del primero y ambos tienen el mismo signo. Por eso el error del primer cálculo [para el paso $h = (b-a)/(4k)$] se determina por la fórmula siguiente (que también tiene en cuenta el signo del error):

$$\delta_S \approx (I_1 - I_2)/15$$

(este procedimiento se puede llamar estimación del error de la fórmula de Simpson por el método de duplicación del paso de los cálculos).

1131. Por la fórmula de los rectángulos calcular $I = \int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx$, dividiendo el intervalo de integración en 10 partes. Estimar el error.

Resolución. Aquí $y = \sqrt{x}$; para $n = 10$ tenemos $h = (2-1)/10 = 0{,}1$. De puntos de división sirven $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + h = 1{,}1$, $x_2 = 1{,}2, \ldots, x_9 = 1{,}9$. Determinamos los valores correspondientes de la función subintegral: $y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1$, $y_1 = \sqrt{1{,}1} = 1{,}049$, $y_2 = 1{,}095$, $y_3 = 1{,}140$, $y_4 = 1{,}183$, $y_5 = 1{,}225$, $y_6 = 1{,}265$, $y_7 = 1{,}304$, $y_8 = 1{,}342$, $y_9 = 1{,}378$.

Utilizando la fórmula de los rectángulos, obtenemos

$$I = 0{,}1\,(1{,}000 + 1{,}049 + 1{,}095 + 1{,}140 + 1{,}183 + 1{,}225 + 1{,}265 + 1{,}304$$
$$+ 1{,}342 + 1{,}378) = 0{,}1 \cdot 11{,}981 \approx 1{,}20.$$

Estimamos el error. En el caso dado $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ sobre el segmento $[1, 2]$ alcanza el valor máximo igual a 0,5 para $x = 1$. De esto modo, $|f'(x)| \leqslant M_1 = 1/2$. De aquí, por la fórmula (3) encontramos

$$R_n \leqslant \frac{0{,}1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}025.$$

Por consiguiente, $I \approx 1{,}20 \pm 0{,}025$.

Para comparar, calculamos esta misma integral por la fórmula de Newton—Leibniz:

$$I = \int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx = \int\limits_1^2 x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1{,}219.$$

En efecto, el valor real de la integral está en el intervalo hallado.

1132. Calcular la misma integral por la fórmula de los trapecios, tomando $n = 10$; estimar el error.

Resolución. Para las mismas designaciones, utilizando la fórmula de los trapecios, obtenemos

$$I = 0,1 \cdot \left(\frac{1 + 1,414}{2} + 1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + \right.$$
$$\left. + 1,225 + 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,378 \right) = 1,218.$$

Luego, $f''(x) = -1/(4\sqrt{x^3})$; $|f''(x)| \leqslant 1/4$ sobre el segmento $[1, 2]$. De este modo, por la fórmula (5) hallamos

$$R_n \leqslant \frac{0,1}{12} \, 1 \cdot \frac{1}{4} \approx 0,002.$$

De suerte que $I \approx 1,218 \pm 0,002$.

1133. Calcular aproximadamente por la fórmula de Simpson $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Ante todo, valiéndonos de la fórmula (7), determinemos qué paso h hace falta tomar para alcanzar la exactitud prefijada. Tenemos

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}; \quad f'(x) = x/\sqrt{1 + x^2}; \quad f''(x) = 1/\sqrt{(1 + x^2)^3};$$
$$f'''(x) = -3x/\sqrt{(1 + x^2)^5}; \quad f^{IV}(x) = (12x^2 - 3)/\sqrt{(1 + x^2)^7}.$$

El valor máximo $|f^{IV}(x)|$ sobre el segmento $[0, 1]$ se alcanza en el punto $x = 0$; $|f^{IV}(0)| = 3$. Así, pues,

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180} (b - a) |f^{IV}(x)| = \frac{h^4}{180} \cdot 1 \cdot 3.$$

Como este error debe ser menos de 0,001, entonces $h^4/60 \leqslant 0,001$, o sea, $h^4 \leqslant 0,06$. Se puede tomar $h = 0,5$ (si $h = 0,5$, $h^4 = 0,0625$), o sea, un poco mayor que la magnitud requerida, pero esto no tendrá influencia sobre la exactitud de los cálculos, puesto que en la estimación ha sido utilizado el error límite absoluto, o sea, una magnitud notoriamente más grande que el error real. De suerte que para alcanzar la exactitud deseada basta dividir por la mitad el intervalo de integración.

Determinemos los valores de la función $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ para $x = 0$; 0,5 y 1: $f(0) = 1,0000$; $f(0,5) = 1,1180$; $f(1,0) = 1,4142$ (realizamos los cálculos con una cifra de reserva). Por eso

$$I \approx \frac{0,5}{3} \cdot [1,0000 + 4 \cdot 1,1180 + 1,4142] = 1,1477.$$

Por lo tanto, redondeando la última cifra decimal, encontramos $I \approx 1,148$

Para comparar, calculemos el valor exacto de esta integral por la fórmula de Newton—Leibniz:

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{1 + x^2} \right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})] \approx \frac{1}{2} (1,4142 + 0,8814) \approx 1,1478.$$

Así, pues, el valor de esta integral determinado por la fórmula de Simpson tiene incluso no tres sino cuatro cifras decimales exactas.

1134. Determinar por la fórmula de Simpson $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$, tomando $n=8$. Efectuar los cálculos con seis cifras decimales. Estimar el error del resultado obtenido, valiéndose del procedimiento de duplicación del paso de cálculos; comparar el resultado con el valor real de la integral, tomando este último con una cifra (séptima) de reserva.

Resolución. Los valores de la función subintegral se han de determinar para los valores siguientes del argumento ($h_1=0{,}125$): $x_0=0$; $x_1=0{,}125$; . . .; $x_8=1{,}0$. Hallamos los valores correspondientes de $f(x)=1/(1+x^2)$: $y_0=1{,}000000$; $y_1=0{,}984625$; $y_2=0{,}941176$; $y_3=0{,}876712$; $y_4=0{,}800000$; $y_5=0{,}719101$; $y_6=0{,}640000$; $y_7=0{,}566389$; $y_8=0{,}500000$. Substituimos estos datos en la fórmula de Simpson para $h_1=0{,}125$ y $h_2=0{,}25$:

$$I_1=\frac{h_1}{3}[y_0+y_8+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+2(y_2+y_4+y_6)]=$$

$$=\frac{0{,}125}{3}\cdot[1{,}000000+0{,}500000+4(0{,}984615+0{,}876712+0{,}719101+$$

$$+0{,}566389)+2\cdot(0{,}941176+0{,}800000+0{,}640000)]=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot 18{,}849548\approx 0{,}785398;$$

$$I_2=\frac{h_2}{3}[y_0+y_8+4(y_2+y_6)+2y_4]=$$

$$=\frac{0{,}25}{3}\cdot[1{,}000000+0{,}500000+4(0{,}941176+0{,}640000)+2\cdot 0{,}800000]=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 9{,}424704=0{,}785392.$$

De aquí

$$\delta_{I_1}\approx\frac{I_1-I_2}{15}=\frac{0{,}000006}{15}\approx 0{,}0000004.$$

De este modo, las seis cifras de I_1 deben ser exactas. El valor real de la integral es

$$I=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7853979,\ \ldots,$$

lo que confirma el resultado hallado.

1135. Valiéndose de la fórmula Simpson calcular $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2}$ con precisión de hasta $0{,}0001$; tomar $n=10$.

1136. Calcular por la fórmula de Simpson $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$, tomando $n = 8$. Estimar el error por el método de duplicación del paso; comparar con el valor exacto de la integral. Realizar los cálculos con cinco cifras decimales.

1137. Calcular por la fórmula de los trapecios $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}5 \operatorname{sen}^2 x}\, dx$, tomando $n = 6$; estimar el error de antemano para determinar con qué número de cifras decimales (con una cifra de reserva) hace falta efectuar los cálculos.

1138. Calcular por la fórmula de los trapecios $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 5$.

1139. Calcular por la fórmula de Simpson $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 4$.

1140. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 4$.

1141. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\, x\, dx$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 6$.

§ 4. Cálculo aproximado de integrales múltiples

1. Análogo de las fórmulas de los rectángulos. a) Examinemos la región cerrada D acotada por las líneas $x = a$, $x = b$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones continuas en el segmento $[a, b]$, además $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$*) (fig. 71). Dividimos la región D en n partes con las líneas

$$y = \varphi(x) + \frac{j}{n}[\psi(x) - \varphi(x)] \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Luego, dividimos el segmento $[a, b]$ en m partes iguales mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ y por estos puntos tracemos las rectas paralelas al eje Oy:

$$x = x_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Con dos familias de líneas (1) y (2) la región D se divide en mn cuadriláteros curvilíneos que tienen por vértices los puntos $P_{ij}(x_i;\, y_{ij})$, $P_{i+1,j}(x_{i+1}, y_{i+1\,j})$, $P_{i,j+1}(x_i;\, y_{i,j+1})$, $P_{i+1,j+1}(x_{i+1}, y_{i+1,j+1})$; $i = 0, 1, 2, \ldots, m$; $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Para una i fijada $(0 \leqslant mi \leqslant)$ la longitud del lado vertical del

*) Notemos que esta condición no limita la generalidad de los razonamientos.

cuadrilátero no depende de j y es igual a

$$|P_{ij}P_{i,\,j+1}| = \frac{\psi(x_i)-\varphi(x_i)}{n}; \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Designemos por $\Delta\omega_{ij}$ el área del cuadrilátero curvilíneo representado en la fig. 72. Este área se determina por la fórmula

$$\Delta\omega_{ij} = \frac{1}{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\psi(x)-\varphi(x)]\,dx. \tag{3}$$

De la igualdad (3) resulta que el valor de $\Delta\omega_i$ no depende de j. Teniendo en cuenta esto, lo designamos con $\Delta\omega_{ij} = \Delta\omega_i$; $0 \leqslant i \leqslant m-1,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1$.

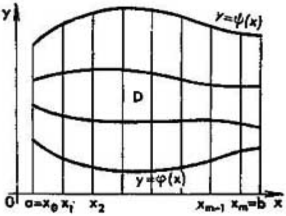

Fig. 71

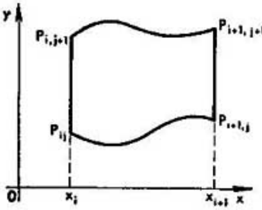

Fig. 72

Sustituimos la integral doble $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$, donde la función $f(x,\ y)$ es continua en la región D, por la suma integral bidimensional, escogiendo en calidad de nudos los puntos P_{ij}:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{i=0}^{n-1} z_{ij}, \tag{4}$$

donde

$$z_{ij} = f(x_i,\ y_{ij}),\quad y_{ij} = \varphi(x_i) + \frac{j}{n}[\psi(x_i)-\varphi(x_i)]. \tag{5}$$

Seleccionando en calidad de nudos sucesivamente los puntos $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,\,j+1}$, obtenemos, respectivamente, otras tres fórmulas para el cálculo aproximado de la integral doble:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=1}^{n-1} z_{i+1,\,j}; \tag{6}$$

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1} z_{i,\,j+1}; \tag{7}$$

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j+1}. \tag{8}$$

Las fórmulas (4), (6), (7) y (8) son el análogo de las fórmulas de los rectángulos para el cálculo aproximado de la integral definida. Es evidente que estas fórmulas son tanto más exactas cuanto mayores son los números m y n, o sea, cuanto menor es la longitud de cada uno de los segmentos de partición.

b) En el caso particular, cuando la región D es un rectángulo definido por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, las áreas $\Delta\omega_i$ de las partes elementales son iguales entre sí y se determinan por la fórmula $\Delta\omega = (b-a)(d-c)/(mn)$. Las fórmulas (4), (6), (7) y (8) adoptan, respectivamente, las formas

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}, \tag{9}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j}, \tag{10}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i,\,j+1}, \tag{11}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j+1}. \tag{12}$$

Las expresiones (9) — (12) se pueden llamar *fórmulas de los paralelepípedos*

c) Si la función $f(x, y)$ es monótona con respecto a cada una de las variables x e y, entonces para la integral doble es válida la estimación

$$\frac{(b-a)(d-c)}{mn}\,\mu \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \frac{(b-a)(d-c)}{mn}\,M, \tag{13}$$

donde M y μ son, respectivamente, la máxima y la mínima entre las sumas

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j}, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i,\,j+1}, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j+1}.$$

d) Sea que la función $f(x, y)$ y sus derivadas parciales $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ son continuas en la región D, del rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Entonces la estimación del error de las fórmulas aproximadas (9) — (12) se determina con ayuda de la desigualdad

$$|R| < \frac{(b-a)(d-c)}{2}\left[\frac{M_1(b-a)}{m} + \frac{M_2(d-c)}{n}\right], \tag{14}$$

donde

$$M_1 = \max_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} |f'_x(x, y)|, \quad M_2 = \max_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} |f'_y(x, y)|.$$

2. Análogo de la fórmula de las tangentes. a) Examinemos la integral doble $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$. Sea la región D el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ en todos los puntos del cual se cumplen las condiciones

$$AC - B^2 > 0, \quad A < 0, \quad C < 0. \tag{15}$$

donde $A = f''_{x^2}$, $C = f''_{y^2}$, $B = f'_{xy}$. Estas condiciones aseguran la convexidad de la superficie $z = f(x, y)$ en todos los puntos de la región D (de un modo análogo las condiciones $AC - B^2 > 0$, $A > 0$, $C > 0$ aseguran la concavidad de esta superficie).

Entonces para el cálculo aproximado de la integral doble es justa la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq (b-a)(d-c) f(\bar{x}, \bar{y}), \tag{16}$$

donde $\bar{x} = (a + b)/2$, $\bar{y} = (c + d)/2$.

b) Dividimos la región D mediante las rectas $x = x_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m$ e $y = y_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ en mn rectángulos iguales. Calculando la integral doble en cada rectángulo elemental con ayuda de la fórmula (16) y sumando los resultados obtenidos, llegamos a la fórmula siguiente para el cálculo aproximado de la integral doble

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j), \tag{17}$$

donde $\bar{x}_i = (x_{i+1} + x_i)/2$, $\bar{y}_j = (y_{j+1} + y_j)/2$.

La fórmula (17) determina el valor aproximado de la integral doble con exceso si se cumplen las condiciones (15). Notemos que la fórmula (17) se puede utilizar también en el caso en que la primera de las condiciones (15) no se cumpla. Sin embargo, en este caso no se puede señalar cómo se ha determinado el valor aproximado de la integral doble: con defecto o con exceso.

3. Análogo de la fórmula de los trapecios. a) Examinemos la integral doble $I = \iint_D f(x, y)\,dx,\,dy$ si la región D es un rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Entonces para el cálculo aproximado de la integral doble es justa la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \tag{18}$$

donde $z_1 = f(a, c)$, $z_2 = f(b, c)$, $z_3 = f(a, d)$, $z = f(b, d)$.

Esta fórmula da el valor aproximado de la integral doble con exceso si se cumple la condición (15).

La estimación del error de la fórmula (18) se determina por la desigualdad

$$(b-a)(d-c) f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) <$$

$$< \iint_D f(x, y)\,dx\,dy < (b-a)(d-c)\frac{f(a, c)+f(b, c)+f(a, d)+f(b, d)}{4}. \tag{19}$$

b) Dividimos la región D por las rectas paralelas a los ejes de coordenadas en mn rectángulos iguales. Calculando la integral doble en cada rectángulo elemental con ayuda de la fórmula (18) y sumando los resultados obtenidos, llegamos a la fórmula siguiente para el cálculo aproximado de la integral doble:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{4mn}(S_0 + 2S_1 + 4S_2), \tag{20}$$

donde $S_0 = z_{00} + z_{m0} + z_{0n} + z_{mn}$ es la suma de los valores de la función en los vértices del rectángulo; $S_1 = \sum_{i=1}^{m-1}(z_{i0} + z_{in}) + \sum_{j=1}^{n-1}(z_{0j} + z_{mj})$ es la suma de los valores de la función en los nudos que están sobre los lados del rectángulo, sin contar los vértices; $S_2 = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}$, es la suma de los valores de la función en los nudos que están dentro del rectángulo.

Si se observan las condiciones (15) por analogía con la desigualdad (19) obtenemos la estimación

$$\frac{(b-a)(d-c)}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) < \iint_D f(x, y)\,dx\,dy <$$
$$< \frac{(b-a)(d-c)}{4mn}(S_0+2S_1+4S_2), \tag{21}$$

donde $\overline{x}_i=(x_{i+1}+x_i)/2$, $\overline{y}_j=(y_{j+1}+y_j)/2$.

Para apreciar el error de la igualdad aproximada (20) es también válida la desigualdad (14).

c) Si la región D está acotada por las líneas $x = a$, $x = b$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, entonces en calidad de valor aproximado de la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ se puede considerar la media aritmética de los resultados de los cálculos aproximados de la integral doble, obtenidos por las fórmulas (4), (6), (7) y (8):

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}(z_{ij}+z_{i+1,\,j}+z_{i,\,j+1}+z_{i+1,\,j+1}), \tag{22}$$

donde $\Delta\omega_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ se calculen por la fórmula (3) y los valores z_{ij}, por las fórmulas (5). Las fórmulas (4), (6), (7), (8) y (22) es conveniente utilizarlas en los casos en que el cálculo exacto o aproximado de las áreas de $\Delta\omega_i$ no presenta dificultades especiales.

4. Análogo de las fórmulas de Simpson. a) Examinamos el caso de la región rectangular D definida por las desigualdades $-h \leqslant x \leqslant h$, $-l \leqslant y \leqslant l$. Seleccionamos los coeficientes del polinomio de tercer grado

$$P_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy +$$
$$+ a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00},$$

de modo que en cinco puntos (nudos) escogidos de un modo especial los valores de la función $f(x, y)$ y del polinomio $P_3(x, y)$ coincidan. Entonces

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x, y)\,dx\,dy \simeq \int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} P_3(x, y)\,dx\,dy.$$

Teniendo en cuenta que $\int_{-a}^{a}\varphi(t)\,dt=0$, si $\varphi(-t)=-\varphi(t)$ sobre $[-a, a]$, obtenemos la fórmula

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{4hl}{3}(a_{20}h^2+a_{02}l^2+3a_{00}). \tag{23}$$

Si los nudos se eligen del modo mostrado en las figs. 73 y 74, entonces la fórmula (23) se puede escribir, respectivamente, en la forma

$$\int_{-l}^{l}\int_{-h}^{h} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{hl}{3}\,[f(h,\ l)+f(-h,\ l)+f(h,\ -l)+$$
$$+f(-h,\ -l)+8f(0,\ 0)], \tag{24}$$

o bien

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x,y)\,dx\,dy \simeq \frac{2}{3}\,hl\,[f(h,0)+f(-h,0)+f(0,l)+f(0,-l)+2f(0,0)]. \tag{25}$$

Para el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ las fórmulas (24) y (25) tienen, respectivamente, la forma

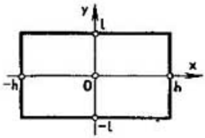

Fig. 73

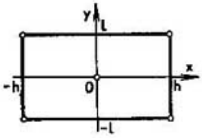

Fig. 74

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[f(a,\ c)+\right.$$
$$\left.+f(a,\ d)+f(b,\ c)+f(b,\ d)+8f\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c+d}{2}\right)\right], \tag{26}$$

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{6}\left[f\left(a,\ \frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\ \frac{c+d}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{a+b}{2},\ c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},\ d\right)+2f\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c+d}{2}\right)\right]. \tag{27}$$

Las fórmulas (26) y (27) son tanto más exactas cuanto menores son las dimensiones del rectángulo; como se deduce de lo expuesto, ellas son exactas para los polinomios de tercer grado.

b) Dividiendo el rectángulo por las rectas paralelas a los ejes de las coordenadas en $4mn$ rectángulos iguales, aplicando a cada uno de estos rectangulos la fórmula (26) y sumando los resultados obtenidos, llegamos a la fórmula

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{12mn}\,(S_0+2S_1+4S_2+8S_3), \tag{28}$$

donde

$$S_0=f(a,\ c)+f(a,\ d)+f(b,\ c)+f(b,\ d),$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{m-1}[f(x_{2i},\ c)+f(x_{2i},\ d)]+\sum_{j=1}^{n-1}[f(a,\ y_{2j})+f(b,\ y_{2j})],$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}f(x_{2i},\ y_{2j}),\quad S_3=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right).$$

Si en los razonamientos precedentes se utiliza la fórmula (27), entonces

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\ y)\,dx\,dy\simeq\frac{(b-a)(d-c)}{6mn}(S_1+S_2+4S_3), \tag{29}$$

donde

$$S_1=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(a,\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)+f\left(b,\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)\right]+$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ c\right)+f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ d\right)\right],$$

$$S_2=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right),$$

$$S_3=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ y_{2j}\right)+f\left(x_{2i},\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)\right].$$

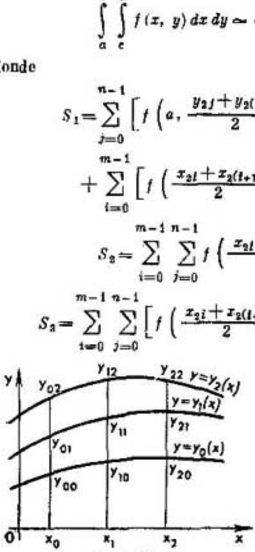

Fig. 75

Las fórmulas (25) — (28) dan un resultado exacto, si la función subintegral es un polinomio no mayor de tercer grado, de las variables x, y, o sea, $f(x,\ y)\equiv P_3(x,\ y)$.

c) Sea que la región D está definida por las desigualdades $x_0\leqslant x\leqslant x_2$, $y_0(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$. Con la recta $x_1=(x_0+x_2)/2$ y con la línea $y_1(x)=[y_0(x)+y_2(x)]/2$ dividimos la región D en cuatro partes (fig. 75). Designemos $y_j(x_i)=y_{ij}$. Como antes, $f(x_i,\ y_{ij})=z_{ij}$ $(i,\ j=0,\ 1,\ 2)$. Examinemos

$$I=\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{x_0}^{x_2}dx\int_{y_0(x)}^{y_2(x)}f(x,\ y)\,dy.$$

Aplicando varias veces la pequeña fórmula de Simpson, obtenemos la igualdad aproximada siguiente:

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy\simeq\frac{x_2-x_0}{36}[(y_{02}-y_{00})(z_{00}+4z_{01}+z_{02})+$$
$$+4(y_{12}-y_{10})(z_{10}+4z_{11}+z_{12})+(y_{22}-y_{20})(z_{20}+4z_{21}+z_{22})]. \tag{30}$$

Notemos que si $y_2(x) - y_0(x) = k =$ const, entonces la fórmula (30) adopta la forma

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq$$

$$\simeq k \cdot \frac{x_2 - x_0}{36}\,[z_{00} + z_{02} + z_{20} + z_{22} + 4(z_{01} + z_{10} + z_{12} + z_{21}) + 16z_{11}]. \qquad (31)$$

En particular, la fórmula (31) es válida si la región de integración D es un rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ con los lados paralelos a los ejes de coordenadas. En este caso

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{36}\Big\{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) +$$

$$+ 4\Big[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) +$$

$$+ f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\Big] + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\Big\}. \qquad (32)$$

La fórmula (30) brinda un resultado exacto, si la función subintegral es un polinomio de tercer grado respecto a y para x fijada y el resultado del cálculo de

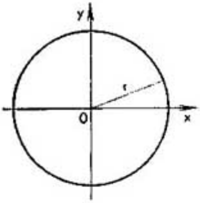

Fig. 76

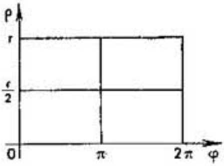

Fig. 77

la integral interior es un polinomio de x no mayor de tercer grado. La fórmula (32) es exacta si $f(x, y)$ es un polinomio de tercer grado respecto a x con y fijo (o respecto a y para x fijo).

d) Si la región de integración D es un círculo con centro en el origen de las coordenadas y radio r (fig. 76), entonces, para el cálculo aproximado de la integral doble es racional pasar a las coordenadas polares:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r f(\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

Dividimos el rectángulo en el plano $\varphi O\rho$ (fig. 77) mediante las rectas $\varphi = \pi$ y $\rho = r/2$ en cuatro partes congruentes. Calculando los valores de la función subintegral en los nudos y aplicando sucesivamente las fórmulas (24) y (25) obtenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{3}\left[f(r, 0) + 2f\left(-\frac{r}{2}, 0\right)\right], \qquad (33)$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{3}\left[f\left(\frac{r}{2}, 0\right) + f(-r, 0) + f\left(-\frac{r}{2}, 0\right)\right], \qquad (34)$$

obtenemos, donde $S = \pi r^2$ es el área del círculo. Las fórmulas (33) y (34) son exactas cuando $F(\rho, \varphi)$ es un polinomio no mayor de tercer grado, con respecto a ρ y φ.

Utilizando la fórmula (32), obtenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{9}\left[f(r, 0)+2f\left(\frac{r}{2}, 0\right)+2f(-r, 0)+\right.$$

$$\left.+4f\left(-\frac{r}{2}, 0\right)\right]. \tag{35}$$

Esta fórmula es exacta si la función $E(\rho, \varphi)$ es un polinomio no mayor de tercer grado, con respecto a ρ para φ fijo (o con respecto a φ para ρ fijo).

d) Si la región de integración está acotada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, entonces, valiéndose de la transformación de las coordenadas, con ayuda de las fórmulas $x = a\rho\cos\varphi$, $y = a\rho \operatorname{sen}\varphi$ la integral doble puede escribirse así:

$$I = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho\cdot f(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\operatorname{sen}\varphi)\,d\rho\,d\varphi.$$

Para tal región las fórmulas (24), (25) y (32) adoptan, respectivamente, el aspecto

$$I \simeq \frac{S}{3}\left[f(a, 0)+2f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{36}$$

$$I \simeq \frac{S}{3}\left[f\left(\frac{a}{2}, 0\right)+f(-a, 0)+f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{37}$$

$$I \simeq \frac{S}{9}\left[f(a, 0)+2f\left(\frac{a}{2}, 0\right)+2f(-a, 0)+4f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{38}$$

donde $S = \pi ab$ es el área de la elipse.

1142. Calcular la integral doble $I = \iint_D (x+y)^2\,dx\,dy$ si la región D está acotada por las líneas $x = 1$, $x = 3$, $y = x^2$, $y = x + x^2$.

Resolución. Determinamos primeramente el valor exacto de la integral

$$I = \int_1^3\int_{x^2}^{x+x^2} (x+y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_1^3 (x+y)^3\Big|_{x^2}^{x+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 [(2x+x^2)^3-(x+x^2)^3]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 (7x^3+9x^4+3x^5)\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{7}{4}x^4+\frac{9}{5}x^5+\frac{1}{2}x^6\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{567}{4}+\frac{2187}{5}+\frac{729}{2}-\frac{7}{4}-\frac{9}{5}-\frac{1}{2}\right) = 313{,}2.$$

Hallamos los valores aproximados de la integral doble valiéndonos de las fórmulas (4), (6), (7), (8) y (22) y comparamos estos valores con los exactos.

Hacemos $m = 4$, $n = 4$. Calculamos los valores y_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2, 3$) utilizando la fórmula (5):

$$y_{ij} = x_i^2 + \frac{x_i}{4} j = x_i \left(x_i + \frac{1}{4} j \right).$$

Puesto que $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = 3$, entonces $y_{00} = 1$; $y_{01} = 1{,}25$; $y_{02} = 1{,}5$; $y_{03} = 1{,}75$; $y_{04} = 2$; $y_{10} = 2{,}25$; $y_{11} = 2{,}625$; $y_{12} = 3$; $y_{13} = 3{,}375$; $y_{14} = 3{,}75$; $y_{20} = 3{,}75$; $y_{21} = 4{,}5$; $y_{22} = 5$; $y_{23} = 5{,}5$; $y_{24} = 6$; $y_{30} = 6{,}25$; $y_{31} = 6{,}875$; $y_{32} = 7{,}5$; $y_{33} = 8{,}125$; $y_{34} = 8{,}75$; $y_{40} = 9$; $y_{41} = 9{,}75$; $y_{42} = 10{,}5$; $y_{43} = 11{,}125$; $y_{44} = 12$. De acuerdo con la fórmula (3) tenemos

$$\Delta\omega_i = \frac{1}{4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x\,dx = \frac{1}{8} x^2 \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{8} (x_{i+1}^2 - x_i^2).$$

Para $i = 0, 1, 2, 3$ obtenemos $\Delta\omega_0 = 0{,}156$; $\Delta\omega_1 = 0{,}219$; $\Delta\omega_2 = 0{,}281$; $\Delta\omega_3 = 0{,}344$.

Luego, como

$$z_{ij} = (x_i + y_{ij})^2 \quad (i = 0, 1, 2, 3; \ j = 0, 1, 2, 3),$$

entonces $z_{00} = 4$; $z_{01} = 5{,}063$; $z_{02} = 6{,}25$; $z_{03} = 7{,}563$; $z_{04} = 9$; $z_{10} \simeq 14{,}063$; $z_{11} \simeq 17{,}016$; $z_{12} = 20{,}25$; $z_{13} \simeq 23{,}766$; $z_{14} \simeq 27{,}563$; $z_{20} = 36$; $z_{21} = 42{,}25$; $z_{22} = 49$; $z_{23} = 56{,}25$; $z_{24} = 64$; $z_{30} \simeq 76{,}563$; $z_{31} \simeq 87{,}891$; $z_{32} = 100$; $z_{33} = 112{,}891$; $z_{34} \simeq 126{,}563$; $z_{40} \simeq 144$; $z_{41} \simeq 162{,}563$; $z_{42} = 182{,}250$; $z_{43} = 199{,}516$ $z_{44} = 225$.

Utilizando ahora las fórmulas (4), (6), (7) y (8) encontramos, respectivamente,

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{ij} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i0} + z_{i1} + z_{i2} + z_{i3}) \simeq$$

$$\simeq 22{,}876 \cdot 0{,}156 + 75{,}095 \cdot 0{,}219 + 183{,}5 \cdot 0{,}281 + 377{,}345 \cdot 0{,}344 \simeq 201{,}386;$$

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{i+1,\,j} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i+1,\,0} + z_{i+1,\,1} + z_{i+1,\,2} + z_{i+1,\,3}) \simeq$$

$$\simeq 75{,}095 \cdot 0{,}156 + 183{,}5 \cdot 0{,}219 + 377{,}345 \cdot 0{,}281 + 688{,}329 \cdot 0{,}344 \simeq 394{,}721;$$

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{i,\,j+1} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i1} + z_{i2} + z_{i3} + z_{i4}) \simeq$$

$$\simeq 27{,}876 \cdot 0{,}156 + 88{,}595 \cdot 0{,}219 + 211{,}5 \cdot 0{,}281 + 427{,}345 \cdot 0{,}344 \simeq 230{,}190;$$

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{i+1,\,j+1} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i+1,\,1} + z_{i+1,\,2} + z_{i+1,\,3} + z_{i+1,\,4}) \simeq$$

$$\simeq 88{,}595 \cdot 0{,}156 + 211{,}5 \cdot 0{,}219 + 427{,}345 \cdot 0{,}281 + 769{,}329 \cdot 0{,}344 \simeq 444{,}873.$$

Los errores absoluto y relativo de los valores obtenidos son bastante grandes lo que se explica por la pequeñez de los números m y n.

Aplicando la fórmula aproximada (22), obtenemos

$$I \simeq \frac{201{,}386 + 230{,}190 + 394{,}721 + 444{,}873}{4} = \frac{1271{,}17}{4} \simeq 317{,}793.$$

Entonces el error relativo

$$\delta = \frac{317{,}793 - 313{,}2}{313{,}2} \cdot 100\% \simeq 1{,}3\%.$$

1143. Utilizando la desigualdad (21), estimar la integral doble $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, si la región D es el rectángulo acotado por las rectas $x = 0$, $x = 4$, $y = 1$, $y = 5$.

Resolución. Aquí $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2y$, $f''_{x^2}(x, y) = 2$, $f''_{y^2}(x, y) = 2$, $f''_{xy}(x, y) = 0$, por eso las condiciones $AC - B^2 > 0$, $A > 0$, $C > 0$ se cumplen. Hacemos $m = 4$, $n = 4$. Los valores de x e y correspondientes a los puntos de partición son los siguientes: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 5$. Puesto que $z_{ij} = x_i^2 + y_j^2$, entonces $z_{00} = 1$, $z_{01} = 4$, $z_{02} = 0$, $z_{03} = 16$, $z_{04} = 25$, $z_{10} = 2$, $z_{11} = 5$, $z_{12} = 10$, $z_{13} = 17$, $z_{14} = 26$, $z_{20} = 5$, $z_{21} = 8$, $z_{22} = 13$, $z_{23} = 20$, $z_{24} = 29$, $z_{30} = 10$, $z_{31} = 13$, $z_{32} = 18$, $z_{33} = 25$, $z_{34} = 34$, $z_{40} = 17$, $z_{41} = 20$, $z_{42} = 25$, $z_{43} = 32$, $z_{44} = 41$. De acuerdo con la fórmula (20) tenemos

$$I \simeq \frac{1}{4}(S_0 + 2S_1 + 4S_2),$$

donde

$S_0 = 1 + 25 + 17 + 41 = 84$, $S_1 = 2 + 5 + 10 + 20 + 25 + 32 + 34 + 29 + 26 + 4 + 9 + 16 = 212$, $S_2 = 5 + 10 + 17 + 8 + 13 + 20 + 13 + 18 + 25 = 129$.

Por consiguiente,

$$I \simeq \frac{1}{4}(84 + 2 \cdot 212 + 4 \cdot 129) = \frac{1}{4} \cdot 1024 = 256.$$

Para el cálculo aproximado de la integral doble con ayuda de la fórmula (17) determinamos primeramente $\overline{x}_i + (x_{i+1} + x_i)/2$, $\overline{y}_j = (y_{j+1} + y_j)/2$ $(i = 0, 1, 2, 3;\ j = 0, 1, 2, 3)$; tenemos $\overline{x}_0 = 0{,}5$; $\overline{x}_1 = 1{,}5$; $\overline{x}_2 = 2{,}5$; $\overline{x}_3 = 3{,}5$; $\overline{y}_0 = 1{,}5$; $\overline{y}_1 = 2{,}5$; $\overline{y}_2 = 3{,}5$; $\overline{y}_3 = 4{,}5$. Designamos $\overline{z}_{ij} = \overline{x}_i^2 + \overline{y}_j^2$ y calculamos

$$\begin{aligned}
&\overline{z}_{00} = 0{,}5^2 + 1{,}5^2 = 2{,}5; && \overline{z}_{10} = 1{,}5^2 + 1{,}5^2 = 4{,}5;\\
&\overline{z}_{01} = 0{,}5^2 + 2{,}5^2 = 6{,}5; && \overline{z}_{11} = 1{,}5^2 + 2{,}5^2 = 8{,}5;\\
&\overline{z}_{02} = 0{,}5^2 + 3{,}5^2 = 12{,}5; && \overline{z}_{12} = 1{,}5^2 + 3{,}5^2 = 14{,}5;\\
&\overline{z}_{03} = 0{,}5^2 + 4{,}5^2 = 20{,}5; && \overline{z}_{13} = 1{,}5^2 + 4{,}5^2 = 22{,}5;\\
&\overline{z}_{20} = 2{,}5^2 + 1{,}5^2 = 8{,}5; && \overline{z}_{30} = 3{,}5^2 + 1{,}5^2 = 14{,}5;\\
&\overline{z}_{21} = 2{,}5^2 + 2{,}5^2 = 12{,}5; && \overline{z}_{31} = 3{,}5^2 + 2{,}5^2 = 18{,}5;\\
&\overline{z}_{22} = 2{,}5^2 + 3{,}5^2 = 18{,}5; && \overline{z}_{32} = 3{,}5^2 + 3{,}5^2 = 24{,}5;\\
&\overline{z}_{23} = 2{,}5^2 + 4{,}5^2 = 26{,}5; && \overline{z}_{33} = 3{,}5^2 + 4{,}5^2 = 32{,}5.
\end{aligned}$$

Entonces

$$I \simeq \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 4}(2{,}5 + 6{,}5 + 12{,}5 + 20{,}5 + 4{,}5 + 8{,}5 + 14{,}5 + 22{,}5 +$$

$8{,}5 + 12{,}5 + 18{,}5 + 26{,}5 + 14{,}5 + 18{,}5 + 24{,}5 + 32{,}5) = 248.$
De suerte que $248 < I < 256$.
Hallemos el valor exacto de la integral:

$$I = \int_0^4 \int_1^5 (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^4 \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_1^5 dx =$$

$$= \int_0^4 \left(5x^2 + \frac{125}{3} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{124}{3}x\right]_0^4 = 250\frac{2}{3} \simeq 250{,}667.$$

De este modo, las fórmulas aproximadas (20) y (17) dan, respectivamente, los errores relativos:

$$\delta_1 = \frac{256-250{,}667}{250{,}667}\cdot 100\% \simeq 2{,}1\%; \quad \delta_2 = \frac{250{,}667-248}{250{,}667}\cdot 100\% \simeq 1{,}1\%.$$

1144. Utilizando la fórmula (32), calcular la integral doble $I = \iint\limits_D (x^2 + 2y)\,dx\,dy$ si la región D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 6$.

Resolución. Determinamos el valor exacto de la integral:

$$I = \int_0^4 dx \int_0^6 (x^2+2y)\,dy = \int_0^4 [x^2y+y^2]_0^6\,dx = \int_0^4 (6x^2+36)\,dx =$$

$$= [2x^3+36x]_0^4 = 272.$$

Aquí $a=0$, $b=4$, $c=0$, $d=6$; $f(x, y)=x^2+2y$; $f(a, c)=0$; $f(a, d)=12$; $f(b, c)=16$; $f(b, d)=28$; $f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)=6$; $f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)=22$; $f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)=$ $=4$; $f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)=16$; $f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)=10$. Aplicando la fórmula (32), encontramos

$$I = \int_0^4 \int_0^6 (x^2+2y)\,dx\,dy = \frac{4\cdot 6}{36}[0+12+16+28+4(6+22+4+16)+16\cdot 10] =$$

$$= \frac{2}{3}(56+4\cdot 48+160) = 272.$$

Hemos obtenido el resultado exacto, ya que la función subintegral $f(x, y) = x^2 + 2y$ es un polinomio de x e y, de grado inferior al tercero.

1145. Calcular la integral doble $I = \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^{3/2} dx\,dy$ si la región D está definida por las desigualdades $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas polares, haciendo $x = 3\rho\cos\varphi$, $y = 2\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Entonces $x^2/9 + y^2/4 = \rho^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Utilizando la fórmula (38), hallamos el valor aproximado de la integral:

$$I \approx \frac{2}{3}\pi\left(1+2\cdot\frac{1}{8}+2+4\cdot\frac{1}{8}\right)=\frac{2}{3}\pi\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=2{,}5\pi.$$

El valor exacto de la integral es

$$I=6\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^4\,d\rho\,d\varphi=\frac{6}{5}\int_0^{2\pi}\rho^5\Big|_0^1 d\varphi=\frac{6}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi}=2{,}4\pi.$$

El error relativo es

$$\delta=(2{,}5\pi-2{,}4\pi)/2{,}4\pi\cdot 100\% \approx 4{,}2\%.$$

1146. Hallar el valor aproximado de la integral doble $I=\iint\limits_D\left(\frac{x}{2}+y\right)dx\,dy$ por la fórmula (30), si la región D está acotada por las curvas $x=2$, $x=4$, $y=x^2/2$ e $y=2x$.

Resolución. Determinamos el valor exacto de la integral:

$$I=\int_2^4 dx\int_{x^2/2}^{2x}\left(\frac{x}{2}+y\right)dy=\int_2^4\left[\frac{x}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2/2}^{2x}dx=$$

$$=\int_2^4\left(x^2+2x^2-\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{8}\right)dx=\left[x^3-\frac{x^4}{16}-\frac{x^5}{40}\right]_2^4=$$

$$=64-16-25{,}6-8+1+0{,}8=16{,}2.$$

Aquí

$$x_0=2,\quad x_2=4,\quad x_1=(x_0+x_2)/2=3,\quad y_0=x^2/2,\quad y_2=2x,$$
$$y_1=(y_0+y_2)/2=x^2/4+x;$$
$$y_{ij}=y_j(x_i);\quad y_{00}=y_0(x_0)=2,\quad y_{01}=y_1(x_0)=3,\quad y_{02}=y_2(x_0)=4,$$
$$y_{10}=y_0(x_1)=4{,}5,\quad y_{11}=y_1(x_1)=5{,}25,\quad y_{12}=y_2(x_1)=6,$$
$$y_{20}=y_0(x_2)=8,\quad y_{21}=y_1(x_2)=8;\quad y_{22}=y_2(x_2)=8.$$
$$z_{ij}=f(x_i,y_{ij})=x_i/2+y_{ij}\ (i,j=0,1,2);$$
$$z_{00}=3,\ z_{01}=4,\ z_{02}=5,\ z_{10}=6,\ z_{11}=6{,}75,\ z_{12}=7{,}5,$$
$$z_{20}=10,\ z_{21}=10,\ z_{22}=10.$$

Por la fórmula (30) obtenemos

$$I=\int_2^4\int_{x^2/2}^{2x}\left(\frac{x}{2}+y\right)dx\,dy=\frac{4-2}{36}\,[(4-2)(3+4\cdot 4+5)+$$

$$+4(6-4{,}5)(6+4\cdot 6{,}75+7{,}5)+(8-8)(10+4\cdot 10+10)]=16\frac{1}{6}=16{,}167.$$

1147. Utilizando las fórmulas (26) y (32), hallar los valores aproximados de la integral doble $I = \iint\limits_D (xy + 3\sqrt{y})\,dx\,dy$ si la región D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 9$.

§ 5. Aplicación del método de Montecarlo para calcular integrales definidas y múltiples

1. Cálculo de integrales definidas por el método de Montecarlo. a) Se requiere calcular la integrla $\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt$. Supongamos que t es una variable aleatoria uniformemente distribuida, $p(t)$ es la densidad de distribución de probabilidades de esta variable aleatoria:

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0; \\ 1, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Entonces la esperanza matemática de la función aleatoria $\varphi(t)$ se determina por la igualdad

$$M[\varphi(t)] = \int\limits_0^1 \varphi(t)\,p(t)\,dt.$$

Teniendo en cuenta los valores de $p(t)$, obtenemos

$$M[\varphi(t)] = \int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Hallemos el valor aproximado de la esperanza matemática. Supongamos que como resultado de N pruebas se obtienen N valores de la variable aleatoria: $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Estos valores se pueden tomar de la tabla de números aleatorios (véase la tabla VI en la pág. 453). Entonces el valor aproximado $M[\varphi(t)]$ se determina, según el teorema de Chébishev, por la igualdad

$$M[\varphi(t)] \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(t_i). \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2) resulta que

$$\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(t_i). \tag{3}$$

b) Examinemos ahora el caso general: supongamos que se exige calcular $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Pasamos a la nueva variable t con ayuda de la igualdad $x = a +$

$+ (b-a)\,t$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 \varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

donde $\varphi(t) = f[a + (b-a)\,t]$. Utilizando la fórmula (3) para el cálculo aproximado de la integral en el segundo miembro de la igualdad (4), obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} \varphi(t_i), \quad \text{o bien} \quad \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{5}$$

donde $x_i = a + (b-a)\,t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

La tabla para calcular la integral definida por la fórmula (5) tiene la forma

i	t_i	$x_i = a + (b-a)\,t_i$	$f(x_i)$
1	t_1	x_1	$f(x_1)$
2	t_2	x_2	$f(x_2)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	t_N	x_N	$f(x_N)$
			$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$

El método expuesto del cálculo aproximado de las integrales definidas con ayuda de la fórmula (5) es uno de los casos particulares del método de pruebas estadísticas (método de Montecarlo).

b) Mostremos otro procedimiento para calcular las integrales definidas, basado en la utilización del método de Montecarlo. De la interpretación geométrica de la integral definida resulta que la integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ expresa el área del trapecio curvilíneo acotado por las líneas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, si la función $f(x)$ es continua y no negativa sobre el segmento $[a, b]$. Examinamos el rectángulo limitado por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = M$, donde $M \geqslant \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ (fig. 78). Si la función $f(x)$ satisface la desigualdad $f(x) \geqslant 0$ no en todos los puntos del segmento $[a, b]$, utilizaremos la identidad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f(x) + h]\,dx - h\,(b-a),$$

donde el número $h > 0$ ha sido escogido de modo que $f(x) + h \geqslant 0$ para $x \in [a, b]$.

El método dado, al igual que el precedente, se basa en la utilización de la tabla de números aleatorios pertenecientes al intervalo $[0, 1]$. Por eso es necesario pasar de las variables x, y a las variables ξ, η, de modo que la región D_1 se transforme en cierta región D que esté dentro del cuadrado unidad $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ (fig. 79). Para esto hacemos $x = a + (b - a)\,\xi$, $y = M\eta$.

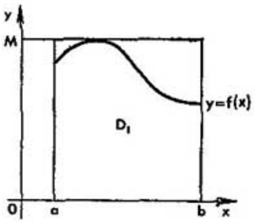

Fig. 78

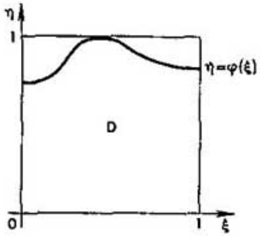

Fig. 79

Entonces $dx = (b - a)\,d\xi$ y al variar x dentro de los límites de a a b la variable ξ toma los valores de 0 a 1. La integral definida dada se transforma, obteniéndose la forma

$$I = (b-a)\cdot M \int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

donde

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{M} f\,[a + (b-a)\,\xi]. \tag{7}$$

De la igualdad (7) se desprende que $f(x) = M\varphi(\xi)$. Examinemos el conjunto de los puntos aleatorios $(\xi_1;\ \eta_1)$ $(\xi_2;\ \eta_2)$, . . ., $(\xi_N;\ \eta_N)$ distribuidos uniformemente sobre el cuadrado unidad. Supongamos que en la región D se tienen n puntos. Como los puntos aleatorios están distribuidos uniformemente, entonces

$$\frac{n}{N} \xrightarrow{\text{en probabilidad}} \frac{\int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi}{1},$$

donde el número 1 expresa el área del cuadrado unidad. Entonces

$$\int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi \approx \frac{n}{N}. \tag{8}$$

De las igualdades (6) y (8) se puede concluir que

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{(b-a)\cdot n\cdot M}{N}. \tag{9}$$

Esto es precisamente la fórmula del cálculo aproximado de la integral definida valiéndose del método de Montecarlo.

La igualdad aproximada (9) se puede escribir así:

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{M(b-a)} \simeq \frac{n}{N}, \tag{10}$$

de donde se deduce que la relación entre el área del trapecio curvilíneo D_1 y el área del rectángulo (véase la fig. 78) es aproximadamente igual a la relación del número de puntos aleatorios que hay dentro del trapecio curvilíneo, con respecto a los que hay dentro del rectángulo.

La table para calcular la integral definida por la fórmula (9) tiene la forma

i	ξ_i	η_i	$x_i = a + (a - b)\,\xi_i$	$y_i = M\eta_i$	$Y_i = f(x_i)$
1	ξ_1	η_1	x_1	y_1	$f(x_1)$
2	ξ_2	η_2	x_2	y_2	$f(x_2)$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	x_N	y_N	$f(x_N)$

Entre los valores de y_i $(i - 1, 2, \ldots, N)$ hay que escoger aquellos que cumplan la desigualdad $y_i < Y_i$. El número de estos valores es igual a n.

2. Cálculo de las integrales múltiples por el método de Montecarlo. a) Se requiere calcular $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde la región D se define por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$. Supongamos que las funciones

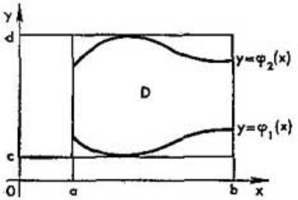

Fig. 80

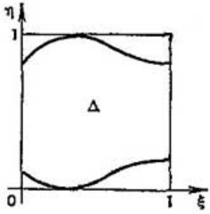

Fig. 81

continuas $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ satisfacen las desigualdades $\varphi_1(x) \geqslant c$, $\varphi_2(x) \leqslant d$ (fig. 80).

Sustituimos las variables aplicando las fórmulas $x = a + (b - a)\,\xi$, $y = c + (d - c)\,\eta$. Efectuada tal transformación, la región D pasa a la región Δ contenida en el cuadrado unidad $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ (fig. 81). Sea n el número de puntos aleatorios $(\xi_i;\ \eta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que se encuentran en la región Δ y N, el número de puntos aleatorios situados dentro del cuadrado unidad. Es evidente que en la región D habrán n puntos $(x_i;\ y_i)$, donde $x_i = a + (b - a)\,\xi_i$, $y_i = c + (d - c)\,\eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. De acuerdo con el teorema del valor medio tenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq f(\bar{x}, \bar{y})\cdot S, \tag{11}$$

donde $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ y S es el área de la región D. Tomamos como valor aproximado de $f(\bar{x}, \bar{y})$ la media aritmética de los valores de la función $f(x, y)$ en n puntos aleatorios que se encuentran en la región D:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \simeq \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{12}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (11) y (12), obtenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{13}$$

Es cómodo emplear la fórmula (13) si el área S se determina con facilidad. Por analogía con la fórmula (10) se puede escribir

$$\frac{S}{(d-c)(b-a)} \simeq \frac{n}{N},$$

donde S es el área de la región D. Entonces

$$S \simeq \frac{n(b-a)(d-c)}{N}. \tag{14}$$

De las igualdades (13) y (14) obtenemos la fórmula para el cálculo aproximado de la integral doble:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{N}\cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{15}$$

Para calcular las integrales dobles con ayuda de la fórmula aproximada (15) es cómodo utilizar la tabla de cálculo:

i	ξ_i	η_i	$x_i = a + (b-a)\xi_i$	$y_i = c + (d-c)\eta_i$	$y_i = \varphi_1(x_i)$	$\bar{y}_i = \varphi_2(x_i)$	$f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	x_1	y_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	x_2	y_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	x_N	y_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

Entre los valores y_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ hace falta escoger tales para los cuales se cumpla la condición $\underline{y}_i \leqslant y_i \leqslant \bar{y}_i$. Su número es igual a n.

b) Generalizamos la fórmula (9) para el caso de la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, si la región D está definida por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$,

$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$. Designamos por M un número tal, que $M \geqslant \max\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d}} f(x, y)$. La integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ expresa, como es sabido, el volumen de un cuerpo cilíndrico V definido por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$. Este cuerpo cilíndrico está situando dentro del paralelepípedo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, $0 \leqslant z \leqslant M$.

Pasamos a las nuevas variables ξ, η, ζ, aplicando las fórmulas $x = a + (b-a)\xi$, $y = c + (d-c)\eta$, $z = M\zeta$. Entonces la región V se transforma en una región Ω, definida por las desigualdades

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \frac{\varphi_1(x)-c}{d-c} \leqslant \eta \leqslant \frac{\varphi_2(x)-c}{d-c}, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1.$$

La región Ω se halla dentro del cubo unidad acotado por los planos $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$. De suerte que

$$I = (b-a)(d-c)\cdot M \iint\limits_{\Delta} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

donde $\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{M} f[a + (b-a)\xi, c + (d-c)\eta]$ y Δ es la región obtenida de la D, después de la sustitución de las variables.

Examinemos el conjunto de puntos aleatorios $(\xi_1; \eta_1; \zeta_1)$, $(\xi_2; \eta_2; \zeta_2)$, ..., $(\xi_N; \eta_N; \zeta_N)$ ditribuidos uniformemente dentro del cubo unidad. El número de estos puntos que se encuentran en la región Δ lo designamos por n. Como los puntos aleatorios están distribuidos uniformemente, entonces $\frac{n}{N}$ en probilidad $\iint\limits_{\Delta} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, o bien $\iint\limits_{\Delta} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \simeq \frac{n}{N}$.

La tabla de cálculo, al utilizar la fórmula (16), tiene el aspecto

i	ξ_i	η_i	ζ_i	$x_i = a + (b-a)\xi_i$	$y_i = c + (d-c)\eta_i$	$z_i = M\zeta_i$	$\underline{y}_i = \varphi_1(x_i)$	$\bar{y}_i = \varphi_2(x_i)$	$Z_i = f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	ζ_1	x_1	y_1	z_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	ζ_2	x_2	y_2	z_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	ζ_N	x_N	y_N	z_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

Retornando a las variables x e y, obtenemos la fórmula aproximada para calcular las integrales dobles utilizando el método de Montecarlo:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \sim \frac{(b-a)(d-c)\cdot n\cdot M}{A}. \tag{16}$$

El número n se determina del modo siguiente: entre los valores de y_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) hay que tomar aquellos para los cuales es válida la desigualdad

$$\underline{y}_i < y_i < \bar{y}_i. \tag{17}$$

Conforme a estos valores de y_i, entre los valores de z_i hace falta elegir aquellos que cumplen la condición

$$z_i < Z_i. \tag{18}$$

Notemos que no es conveniente determinar todos los valores de $Z_i = f(x_i, y_i)$, sino que sólo los correspondientes a aquellos valores de y_i para los cuales se cumple la condición (17).

c) Una fórmula análoga a las relaciones (9) y (15) tiene lugar también para integrales de multiplicidad k:

$$\iint\limits_{V} \dots \int f(x_1, x_2, \dots x_k)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_k \approx \frac{n \cdot M}{N} \cdot \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i), \qquad (19)$$

donde la región V pertenece a un paralelepípedo k-dimensional, en el cual las coordenadas de los puntos satisfacen k desigualdades $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) y la función $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ es continua en la región V y satisface la condición $0 \leqslant f(x_1, x_2, \dots, x_k) \leqslant M$.

La deducción de las fórmulas (9), (15) y (19) está basada en la utilización del concepto de convergencia en probabilidad. Por eso la razón n/N es tanto más estable cuanto mayor es N. Esto significa que para todo número $\varepsilon > 0$ tanto pequeño como se quiera, la probabilidad de la desigualdad $|I - \tilde{I}| < \varepsilon$, donde I es el valor exacto de la integral e $\tilde{I}$ es su valor aproximado, obtenido con ayuda del método de Montecarlo, crece con el incremento de N. No obstante, puede suceder que también con N muy grandes resulte que $|I - \tilde{I}| > \varepsilon$. En la práctica la última circunstancia se encuentra raramente.

En lo que se refiere al método de Montecarlo, los ejemplos citados tienen un caracter ilustrativo, persiguiendo el fin de dar a conocer a los estudiantes la esencia del procedimiento.

En virtud de las observaciones hechas, para el cálculo aproximado de las integrales con ayuda del método de Montecarlo es necesario utilizar una calculadora electrónica, habiendo preparado previamente el programa respectivo del método.

1148. Con ayuda de la fórmula (3) hallar el valor aproximado de la integral $I = \int_0^1 (1 - t^2)\, dt$, tomando de la tabla de números aleatorios en la pág. 453, 30 valores seguidos y limitándose a tres cifras decimales.

Resolución. La tabla de cálculo tiene la forma

i	t_i	t_i^2	i	t_i	t_i^2	i	t_i	t_i^2
1	0,857	0,734	11	0,609	0,371	21	0,070	0,005
2	0,457	0,209	12	0,179	0,032	22	0,692	0,478
3	0,499	0,249	13	0,974	0,949	23	0,696	0,484
4	0,762	0,581	14	0,011	0,0001	24	0,203	0,041
5	0,431	0,186	15	0,098	0,010	25	0,350	0,122
6	0,698	0,487	16	0,805	0,648	26	0,900	0,810
7	0,038	0,001	17	0,516	0,266	27	0,451	0,203
8	0,558	0,311	18	0,296	0,088	28	0,318	0,101
9	0,653	0,426	19	0,149	0,022	29	0,798	0,637
10	0,573	0,328	20	0,815	0,664	30	0,111	0,012

De este modo,

$$\sum_{i=1}^{30}(1-t_i^2)=30-\sum_{i=1}^{30}t_i^2=30-9{,}455=20{,}545,$$

de donde, por la fórmula (3) obtenemos

$$\int_0^1(1-t^2)\,dt=\frac{1}{30}\cdot 20{,}545\approx 0{,}685.$$

El valor exacto de la integral es

$$I=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\approx 0{,}667.$$

De suerte que el error absoluto vale $|\,0{,}667-0{,}685\,|=0{,}018$ y el error relativo $\delta=(0{,}018/0{,}667)\cdot 100\%\simeq 2{,}7\%$.

1149. Calcular la integral definida $I=\int_2^3(x^2+x^3)\,dx$, haciéndose uso de la fórmula aproximada (5).

Resolución. Tomamos de la tabla de números aleatorios 20 valorés a partir del tercero. La tabla de cálculo tiene la forma

i	t_i	$x_i=2+t_i$	x_i^2	x_i^3	$f(x_i)=x_i^2+x_i^2$
1	0,499	2,499	6,245	15,606	21,851
2	0,762	2,762	7,629	21,070	28,699
3	0,431	2,431	5,910	14,367	20,277
4	0,698	2,698	7,279	19,639	26,918
5	0,038	2,038	4,153	8,464	12,617
6	0,558	2,558	6,543	16,738	23,281
7	0,653	2,653	7,038	18,672	25,710
8	0,573	2,573	6,620	17,034	23,654
9	0,609	2,609	6,807	17,759	24,566
10	0,179	2,179	4,748	10,346	15,094
11	0,974	2,974	8,645	26,305	35,150
12	0,011	2,011	4,044	8,133	12,177
13	0,098	2,098	4,402	9,235	13,637
14	0,805	2,805	7,868	22,07	29,938
15	0,516	2,516	6,330	15,926	22,256
16	0,296	2,296	5,276	12,104	17,380
17	0,149	2,149	4,618	9,924	14,542
18	0,815	2,815	7,924	22,307	30,231
19	0,070	2,070	4,285	8,870	13,155
20	0,692	2,692	7,247	19,508	26,755

Utilizando la fórmula (5) para $a=2$, $b=3$, $N=20$, $\sum_{i=1}^{20}f(x_i)=437{,}888$ encontramos

$$I\simeq 437{,}888/20=21{,}894.$$

El valor exacto de la integral es

$$I=\int_{2}^{3}(x^2+x^3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3=22\frac{7}{12}\approx 22{,}583.$$

El error relativo resulta

$$\delta=(22{,}583-21{,}894)/22{,}583\cdot 100\%\simeq 3{,}1\%.$$

1150. Calcular la integral definida $I=\int_2^3(x^2+x^3)\,dx$, utilizando la igualdad aproximada (9).

Resolución. Aquí $a=2$, $b=3$, $\max\limits_{2\leqslant x\leqslant 3}(x^2+x^3)=36$. Hacemos $x=2+\xi$, $y=36\eta$. Tomamos de la tabla de números aleatorios 40 valores ($N=20$). La tabla de cálculo tiene la forma

i	ξ_i	η_i	$x_i=2+\xi_i$	$y_i=36\eta_i$	x_i^2	x_i^3	$Y_i=x_i^2+x_i^3$
1	0,857	0,457	2,857	16,452	8,162	23,319	31,481
2	0,499	0,762	2,499	27,432	6,245	15,606	21,851
3	0,431	0,698	2,431	25,128	5,910	14,367	20,277
4	0,038	0,558	2,038	20,088	4,153	8,464	12,617
5	0,653	0,573	2,653	20,628	7,038	18,672	25,710
6	0,609	0,179	2,609	6,444	6,807	17,759	24,566
7	0,974	0,011	2,974	0,396	8,845	26,305	35,150
8	0,098	0,805	2,098	28,980	4,402	9,235	13,637
9	0,516	0,296	2,516	10,656	6,330	15,926	22,256
10	0,149	0,815	2,149	29,340	4,618	9,924	14,542
11	0,070	0,692	2,070	24,912	4,285	8,870	13,155
12	0,696	0,203	2,696	7,308	7,268	15,595	26,863
13	0,350	0,900	2,350	32,400	5,523	12,979	18,502
14	0,451	0,318	2,451	11,448	6,007	14,723	20,730
15	0,798	0,111	2,798	3,996	7,829	21,906	29,735
16	0,933	0,199	2,933	7,164	8,602	25,230	33,832
17	0,183	0,421	2,183	15,156	4,765	10,402	15,167
18	0,338	0,104	2,338	3,744	5,466	12,780	18,246
19	0,190	0,150	2,190	5,400	4,796	10,503	15,299
20	0,449	0,320	2,449	11,520	5,998	14,689	20,687

Como se ve de la tabla $n=13$. Por consiguiente, por la fórmula (9) encontramos

$$I\simeq(36\cdot 13)/20=23{,}4;\qquad \delta=(23{,}4-22{,}583)/22{,}583\cdot 100\%\simeq 3{,}6\%.$$

1151. Aplicando la fórmula (15), hallar el valor aproximado de la integral doble $I=\iint\limits_D(x+2y)\,dx\,dy$, si la región D se define por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant 1$, $x/2\leqslant y\leqslant x$ (fig. 82).

Resolución. Aquí $a=0$, $b=1$. Puesto que la región D está situada en el cuadrado unidad, no se necesita pasar a nuevas variables. Tomamos de la tabla de números aleatorios 20 valores seguidos. La tabla de cálculo tiene la forma

i	x_i	y_i	$\underline{y}_i = x_i/2$	$\bar{y}_i = x_i$	$2y_i$	$f(x_i, y_i) = x_i + 2y_i$
1	0,857	0,457	0,428	0,857	0,914	1,771
2	0,499	0,762	0,249	0,499		
3	0,431	0,698	0,215	0,431		
4	0,038	0,558	0,019	0,038		
5	0,653	0,573	0,326	0,653	1,146	1,799
6	0,609	0,179	0,304	0,609		
7	0,974	0,011	0,487	0,974		
8	0,098	0,805	0,049	0,098		
9	0,516	0,296	0,258	0,516	0,592	1,108
10	0,149	0,815	0,074	0,149		

Por la fórmula (15) para $N = 10$ y $n = 3$ obtenemos

$$I \simeq (1{,}771 + 1{,}799 + 1{,}108)/10 = 4{,}578/10 \simeq 0{,}458.$$

Determinamos el valor exacto de la integral:

$$I = \iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x/2}^{x} (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x+2y)^2\Big|_{x/2}^{x} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (9x^2 - 4x^2)\,dx = \frac{5}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{5}{12} \simeq 0{,}417.$$

Entonces $\delta = (0{,}458 - 0{,}417)/0{,}417 \cdot 100\% \simeq 9{,}82\%$.

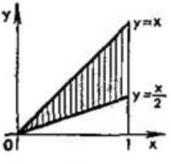

Fig. 82

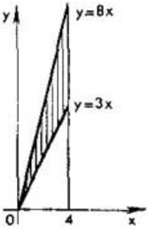

Fig. 83

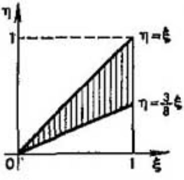

Fig. 84

Aquí, al igual que en otros problemas, el número $n = 3$ es insuficiente para que puedan manifestarse, en medida debida, regularidades estadísticas. Sin embargo, para una orientación aproximada se ha obtenido el resultado satisfactorio.

1152. Calcular, haciéndo uso de la fórmula (16), la integral doble $\iint_D \sqrt{x+y}\,dx\,dy$, donde la región D está acotada por las líneas $x = 0$, $x = 4$, $y = 3x$, $y = 8x$ (fig. 83).

Resolución. Escribiendo la integral doble dada en forma de la reiterada, tenemos $I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x}^{8x} \sqrt{x + y}\, dy$. Aquí $a = 0$, $b = 4$, $\varphi_1(x) = 3x$, $\varphi_2(x) = 8x$; luego, $\varphi_1(x) \geqslant 0$, $\varphi_2(x) \leqslant 32$, por eso $c = 0$, $d = 32$. Como $\max\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant 32}} \sqrt{x + y} = 6$, efectuemos la sustitución de las variables con ayuda de las fórmulas $x = 4\xi$, $y = 32\eta$, $z = 6\zeta$. Las rectas $y = 3x$ e $y = 8x$ se transforman en las rectas $\eta = (3/8)\,\xi$, $\eta = \xi$, respectivamente (fig. 84). Tomemos de la tabla de números aleatorios 60 valores ($N = 20$). La tabla de cálculo tiene la forma

i	ξ_i	η_i	ζ_i	$x_i = 4\xi_i$	$y_i = 32\eta_i$	$z_i = 6\zeta_i$	$y_i = 3x_i$	$\bar{y}_i = 8x_i$	$x_i + y_i$	$Z_i = \sqrt{x_i + y_i}$
1	0,857	0,457	0,499	3,428	14,624	2,994	10,284	27,424	18,052	4,249
2	0,762	0,431	0,698	3,048	13,792	4,188	9,144	24,384	16,840	4,104
3	0,038	0,558	0,653	0,152	17,856		0,456	1,216		
4	0,573	0,609	0,179	2,292	19,488		6,876	18,336		
5	0,974	0,011	0,098	3,896	0,352		11,688	31,168		
6	0,805	0,516	0,296	3,220	16,512	1,776	9,660	25,760	19,732	4,441
7	0,149	0,815	0,070	0,596	26,080		1,788	4,768		
8	0,692	0,696	0,203	2,768	22,272		8,304	22,144		
9	0,350	0,900	0,451	1,400	28,800		4,200	11,200		
10	0,318	0,798	0,111	1,272	25,536		3,816	10,176		
11	0,933	0,199	0,183	3,732	6,368		11,196	26,976		
12	0,421	0,338	0,104	1,684	10,816	0,624	5,052	13,472	12,500	3,536
13	0,190	0,150	0,449	0,760	4,800	2,694	2,280	6,080	5,560	2,358
14	0,320	0,165	0,617	1,280	5,280	3,702	3,840	10,240	6,650	2,561
15	0,369	0,069	0,248	1,476	2,208		4,428	11,808		
16	0,960	0,652	0,367	3,840	20,864	2,202	11,520	30,720	24,704	4,970
17	0,168	0,261	0,189	0,672	8,352		2,016	5,376		
18	0,703	0,142	0,486	2,812	4,544		8,436	22,496		
19	0,233	0,424	0,291	0,932	13,568		2,796	7,456		
20	0,473	0,645	0,514	1,892	20,640		5,676	15,136		

Como se deduce de la tabla de cálculo, $n = 4$. De este modo, por la fórmula (16) determinamos

$$I \approx \frac{(4-0)\,(32-0)\cdot 6\cdot 4}{20} = 153,6.$$

El valor exacto de la integral es

$$I = \frac{2}{3}\int\limits_0^4 (x+y)^{3/2}\Big|_{3x}^{8x} dx = \frac{76}{15}\,x^{5/2}\Big|_0^4 = 162\,\frac{2}{15} \approx 162,1.$$

y el error relativo es

$$\delta = (162,1 - 153,6)/162,1 \cdot 100\% \simeq 5,2\%.$$

1153. La integral doble $I=\iint\limits_{D}\sqrt{x+y+1}\;dx\,dy$, donde D es el rectángulo $0\leqslant x\leqslant 4$, $1\leqslant y\leqslant 7$, calcularla por tres procedimientos: 1) por la fórmula (20) § 4; 2) por la fórmula (28) § 4; 3) por la fórmula (16), tomando de la tabla de números aleatorios 60 valores. En cada caso estimar el error relativo.

1154. La integral doble $I=\iint\limits_{D}\frac{\cos y}{x}\,dx\,dy$, donde la región D se define mediante las desigualdades $0{,}2\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$, calcularla por dos procedimientos: 1) por la fórmula (30) § 4; 2) por la fórmula (16), tomando de la tabla de números aleatorios 90 valores. Estimar el error relativo.

1155. Hallar el valor aproximado de la integral triple $I=\iiint\limits_{D}(x+y+2z)\,dx\,dy\,dz$, haciendo uso de la fórmula (19) para $k=3$, si la región D se define por las desigualdades $1\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant y\leqslant x$, $x+y\leqslant z\leqslant x\leqslant +2y$.

Resolución. La fórmula (19) para la integral triple tiene la forma

$$I\approx\frac{(b-a)(d-c)(h-g)\cdot M\cdot n}{N}.$$

Aquí $a=1$, $b=3$, $c=0$, $d=3$, $g=1$, $h=9$, $M=\max\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 3\\ 1\leqslant z\leqslant 9}}(x+y+2z)=24$. Realizamos la sustitución de las variables con ayuda de las fórmulas $x=1,+2\xi$, $y=3\eta$, $z=1+8\zeta$, $u=24\sigma$. Tomamos de la tabla de números aleatorios 80 valores ($N=20$).

Primeramente hallamos los valores de y_i $(1\leqslant i\leqslant 20)$ para los cuales se cumple la condición $\underline{y}_i\leqslant y_i\leqslant\bar{y}_i$; el número de tales valores es igual a 11. Luego, entre 11 valores respectivos de z_i encontramos tales para los cuales $\underline{z}_i\leqslant z_i\leqslant\bar{z}_i$; estos valores son tres. Finalmente, entre tres valores correspondientes de u_i buscamos aquellos que satisfagan la desigualdad $u_i<U_i$; el número de tales valores es $n=1$. De este modo,

$$I\simeq(48\cdot 24)/20=1152/20=57{,}6.$$

Determinemos el valor exacto de la integral:

$$I=\int_1^3 dx\int_0^x dy\int_{x+y}^{x+2y}(x+y+2z)\,dz=\frac{1}{4}\int_0^3 dx\int_0^x (x+y+2z)^2\Big|_{x+y}^{x+2y}dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3 dx\int_0^x[(3x+5y)^2-(3x+3y)^2]\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3\left[\frac{1}{15}(3x+5y)^3-\frac{1}{9}(3x+3y)^3\right]_0^x dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3\left[\frac{(8x)^3}{15}-\frac{(6x)^3}{9}-\frac{(3x)^3}{15}+\frac{(3x)^3}{9}\right]dx=$$

i	ξ_i	η_i	ζ_i	σ_i	x_i	y_i	z_i	u_i	$\underline{y}_i = 0$	$\bar{y}_i = x_i$	$\underline{z}_i = x_i + y_i$	$\bar{z}_i = x_i + 2y_i$	$2z_i$	$U_i = x_i + y_i + 2z_i$
1	0,165	0,617	0,369	0,069	1,330	1,851	3,952	1,656	0	1,330				
2	0,248	0,960	0,652	0,367	1,496	2,880	6,216	8,08	0	1,496				
3	0,168	0,261	0,189	0,703	1,336	0,783	2,512	16,872	0	1,336	2,119	2,902	5,024	7,143
4	0,142	0,486	0,233	0,424	1,284	1,458	2,864	10,176	0	1,284				
5	0,291	0,473	0,645	0,514	1,582	1,419	6,160	12,336	0	1,582	3,001	4,420		
6	0,819	0,064	0,870	0,256	2,638	0,192	7,960	6,144	0	2,638	2,830	3,022		
7	0,347	0,151	0,912	0,191	1,694	0,453	8,296	4,584	0	1,694	2,147	2,600		
8	0,259	0,096	0,019	0,854	1,518	0,288	1,152	20,496	0	1,518	1,806	2,094	2,304	4,110
9	0,193	0,732	0,253	0,352	1,386	2,196	3,024	8,448	0	1,386				
10	0,729	0,102	0,222	0,088	2,458	0,306	2,776	2,112	0	2,458	2,764	3,070	5,552	8,316
11	0,205	0,562	0,851	0,647	1,410	1,686	7,808	15,528	0	1,410				
12	0,568	0,020	0,051	0,649	2,136	0,060	1,408	15,576	0	2,136	2,196	2,256		
13	0,179	0,896	0,453	0,546	1,358	2,688	4,624	13,104	0	1,358				
14	0,919	0,691	0,155	0,181	2,838	2,073	2,240	4,344	0	2,838	4,911	6,984		
15	0,273	0,876	0,690	0,494	1,546	2,628	6,520	11,856	0	1,546				
16	0,339	0,910	0,789	0,908	1,678	2,730	7,312	21,792	0	1,678				
17	0,263	0,131	0,389	0,438	1,526	0,393	4,112	10,512	0	1,526	1,919	2,312		
18	0,161	0,485	0,535	0,090	1,322	1,455	5,280	2,160	0	1,322				
19	0,142	0,321	0,969	0,091	1,284	0,963	8,752	2,184	0	1,284	2,247	3,210		
20	0,463	0,251	0,596	0,784	1,926	0,753	5,768	18,816	0	1,926	2,679	3,432		

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{485}{15}-\frac{189}{9}\right)\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=56\,\frac{2}{3}\approx 56{,}667;$$

$$\delta=(57{,}6-56{,}667)/56{,}667\cdot 100\%\approx 1{,}6\%.$$

La tabla de cálculo tiene la forma:

1. Método de Euler. La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ define sobre el plano el así llamado *campo de direcciones*, o sea, en cada punto del plano en que existe la función $f(x, y)$ determina la dirección de la curva integral de la ecuación que pasa por este punto. Supongamos que se exige resolver el problema de Cauchy, o sea, hallar la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Dividimos el segmento $[x_0, X]$ en n partes iguales y hacemos $(X - x_0)/n = h$ (h es el paso de variación del argumento). Supongamos que dentro del intervalo elemental de x_0 a $x_0 + h$, la función y' conserva el valor constante de $f(x_0, y_0)$. Entonces, $y_1 - y_0 \approx h\cdot f(x_0, y_0)$, donde y_1 es el valor de la función buscada, correspondiente al valor de $x_1 = x_0 + h$. De aquí obtenemos $y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Repitiendo esta operación, hallamos los valores sucesivos de la función:

$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$, $y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$, . . ., $y_{k+1} \approx y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. De este modo, se puede trazar aproximadamente la curva integral en la forma de una quebrada con vértices $M_k(x_k; y_k)$, donde $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$, $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. Este método se llama *método de quebradas de Euler* o simplemente *método de Euler*.

1156. Utilizando el método de Euler, hallar los valores de la función y, definida por la ecuación diferencial $y' = \frac{y-x}{y+x}$, para la condición inicial $y(0) = 1$; el paso es $h = 0{,}1$. Determinar sólo los primeros cuatro valores de y.

Resolución. Hallamos los valores sucesivos del argumento: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$. Calculamos los valores correspondientes de la función buscada:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (1-0)/(1+0) = 1{,}1;$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (1{,}1 - 0{,}1)/(1{,}1 + 0{,}1) = 1{,}183;$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1{,}183 + 0{,}1 \cdot (1{,}183 - 0{,}2)/(1{,}183 + 0{,}2) = 1{,}254;$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1{,}254 + 0{,}1 \cdot (1{,}254 - 0{,}3)/(1{,}254 + 0{,}3) = 1{,}315.$$

Así, pues, obtenemos la tabla:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

1157. Hallar, con ayuda del método de Euler, cuatro valores de la función y definida por la ecuación $y' = x + y$, para la condición inicial $y(0) = 1$, tomando $h = 0{,}1$.

Resolución. Los valores del argumento son $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$. Determinamos los valores correspondientes de y:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (0+1) = 1{,}1;$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22;$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1{,}22 + 0{,}1 \cdot (0{,}2 + 1{,}22) = 1{,}36;$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1{,}36 + 0{,}1 \cdot (0{,}3 + 1{,}36) = 1{,}52.$$

Obtenemos la tabla:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

1158. Hallar, por el método de Euler, tres valores de la función y, definida por la ecuación $y' = 1 + x + y^2$, para la condición inicial $y(0) = 1$, haciendo $h = 0{,}1$.

1159. Hallar, con ayuda del método de Euler, cuatro valores de la función y, definida por la ecuación $y' = x^2 + y^2$ para la condición inicial $y(0) = 0$, tomando $h = 0{,}1$.

1160. Hallar por método de Euler, la solución numérica de la ecuación $y' = y^2 + \frac{y}{x}$ para la condición inicial $y(2) = 4$, haciendo $h = 0{,}1$ (cuatro valores).

1161. Hallar, con ayuda del método de Euler, la solución numérica de la ecuación $y = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$ sobre el segmento $[0, 1]$, para la condición inicial $y(0) = 1$, adoptando $h = 0{,}2$.

1162. Hallar por el método de Euler la solución numérica del sistema de ecuaciones $\frac{dx}{dt} = \frac{y-x}{t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{x+y}{t}$, para las condiciones iniciales $x(1) = 1$, $y(1) = 1$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, haciendo $h = 0{,}2$.

2. Método de Runge-Kutta. Sea que la función y está definida por la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ para la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Efectuando la integración numérica de tal ecuación por *el método de Runge-Kutta* se determinan cuatro números:

$$k_1 = h \cdot f(x, y), \quad k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = h \cdot f(x + h,\ y + k_3).$$

Si se hace $y(x + h) = y(x) + \Delta y$, se puede demostrar que $\Delta y \approx \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$. El esquema de cálculos tiene la forma

x	y	$k_j = h \cdot f(x, y)$	Adición
x_0	y_0	k_1	$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_1$	k_2	
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_2$	k_3	
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	k_4	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + k$		

1163. Componer la tabla de valores de la función y, definida por la ecuación $y' = y - \frac{2x}{y}$, para la condición inicial $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$; el paso es $h = 0{,}2$ (la solución exacta es $y = \sqrt{2x+1}$).

Resolución. Hallamos los números:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0,2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0,1;\ 1{,}1) =$$

$$= 0{,}2 \cdot \left(1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right) = 0{,}1836;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0;\ 1;\ 1{,}0918) = 0{,}1817;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h,\ y + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2;\ 1{,}1817) = 0{,}1686.$$

De aquí,

$$\Delta y = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$$

De suerte que $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ para $x = 0{,}2$. De un modo análogo determinamos y_2, etc. El proceso de cálculo se efectúa por el esquema siguiente:

i	x	y	$f(x, y)$	$k_i = h \cdot f(x, y)$	Δy
1	0	1	1	0,2	
2	0,1	1,1	0,0918	0,1838	0,1832
3	0,1	1,0918	0,0908	0,1817	
4	0,2	1,1817	0,0843	0,1686	
1	0,2	1,1832	0,8451	0,1690	
2	0,3	1,2677	0,7944	0,1589	1,1584
3	0,3	1,2626	0,7874	0,1575	
4	0,4	1,3407	0,7440	0,1488	
1	0,4	1,3416	0,7453	0,1491	
2					
3					
4					
1					

Notemos que las cinco cifras de los números $y_1 = 1{,}1832$ e $y_2 = 1{,}3416$ coinciden con la solución exacta $y = \sqrt{2x+1}$.

1164. Valiéndose del método de Runge-Kutta, integrar la ecuación $x^2y' - xy = 1$ para la condición inicial $y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 2]$; el paso es $h = 0,2$ [la solución exacta es $y = (x^2 - 1)/(2x)$].

Resolución. Aquí $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$. Hallamos los números:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0,2 \cdot \left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1^2}\right) = 0,2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{1}\right) = 0,2 \cdot \left(\frac{0,1}{1,1} + \frac{1}{1,1^2}\right) = 0,18;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0,2 \cdot \left(\frac{0,09}{1,1} + \frac{1}{1,1^2}\right) = 0,18;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0,2 \cdot \left(\frac{0,18}{1,2} + \frac{1}{1,2^2}\right) = 0,17.$$

Por consiguiente,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,18, \text{ o sea,}$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0,18 = 0,18.$$

Del modo análogo encontramos

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0,2\left(\frac{0,18}{1,2} + \frac{1}{1,2^2}\right) = 0,17;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0,2\left(\frac{0,26}{1,3} + \frac{1}{1,3^2}\right) = 0,15;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0,2\left(\frac{0,25}{1,3} + \frac{1}{1,3^2}\right) = 0,15,$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0,2\left(\frac{0,33}{1,4} + \frac{1}{1,4^2}\right) = 0,14.$$

Por lo tanto,

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,15, \text{ o sea, } y_2 = y_1 + \Delta y_1 =$$
$$= 0,18 + 0,15 = 0,33, \text{ etc.}$$

1165. Haciendo uso del método de Runge-Kutta, integrar la ecuación $4y' = y^2 + 4x^2$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con el paso $h = 0,1$. Realizar los cálculos con tres cifras exactas.

1166. Utilizando el método de Runge-Kutta, integrar la ecuación $y' = x/y + 0,5y$, $y(0) = 1$, en el intervalo $[0, 1]$ con el paso $h = 0,1$. Realizar los cálculos con tres cifras exactas.

3. Método de Adams. Supongamos que se exige integrar la ecuación $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Uno de los métodos de diferencias para la solución aproximada de este problema es *el de Adams*. Prefijando cierto paso de variación del argumento h, se determinan por un procedimiento cualquiera, partiendo de los datos iniciales $y(x_0) = y_0$, los tres valores siguientes de la función buscada $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_0 + 2h), \quad y_3 = y(x_0 + 3h)$$

(estos tres valores pueden obtenerse valiéndose de un método cualquiera que asegure la exactitud deseada: con ayuda del desarrollo de la solución en serie de potencias, por el método de Runge-Kutta, etc., pero no por el método de Euler, debido a su exactitud insuficiente). Con ayuda de los números x_0, x_1, x_2, x_3 e y_0, y_1, y_2, y_3, se determinan las magnitudes

$$q_0 = h \cdot y_0' = h \cdot f(x_0, y_0),\ q_1 = h \cdot f(x_1, y_1),$$
$$q_2 = h \cdot f(x_2, y_2),\ q_3 = h \cdot f(x_3, y_3).$$

Luego se hace la tabla de diferencias finitas de las magnitudes y y q:

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		$\Delta^2 q_0$		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			
...	...	...	...	...	...	...

Conociendo los números en la fila inferior oblicua, con ayuda de la fórmula de Adams se determina

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_0$$

y luego se halla también la magnitud $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Conociendo ahora y_4, se calcula $q_4 = h \cdot f(x_4, y_4)$, después de lo cual se puede escribir la fila oblicua siguiente:

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3,\ \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2,\ \Delta^3 q_1 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1.$$

La nueva fila oblicua permite calcular, con ayuda de la fórmula de Adams, el valor

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2} \Delta q_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_1$$

y, por consiguiente, $y_5 = y_4 + \Delta y_4$, etc.

1167. Aplicando el método de Adams, hallar el valor de y (0,4) con precisión de hasta 0,01, para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = -1$.

Resolución. Determinamos los primeros cuatro términos del desarrollo de la solución de la ecuación dada en serie de Taylor en el entorno del punto $x = 0$:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)\cdot x^3 + \ldots .$$

Según los datos, $y(0) = -1$; los valores de $y'(0)$, $y''(0)$ e $y'''(0)$ los encontramos derivando sucesivamente la ecuación dada:

$$y' = x^2 + y^2;\ y'(0) = 0^2 + (-1)^2 = 1,$$

$$y'' = 2x + 2yy';\ y''(0) = 0 + 2\cdot(-1)\cdot 1 = -2,$$

$$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'';\ y'''(0) = 2 + 2\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)(-2) = 8.$$

De este modo,

$$y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots .$$

Calculamos $y(x)$ en los puntos $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, con una cifra decimal de reserva (tercera): $y_1 = -0{,}909$; $y_2 = -0{,}829$, $y_3 = -0{,}754$. Componemos la tabla

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
0	−1		0,1			
0,1		0,091		−0,017		
	−0,909		0,083		0,006	
0,2		0,080		−0,011		−0,002
	−0,829		0,072		0,004	
0,3		0,075		−0,007		
	−0,754		0,065			
0,4						

Entonces,

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 =$$

$$= 0{,}065 + \frac{1}{2}(-0{,}007) + \frac{5}{12}\cdot 0{,}004 + \frac{3}{8}\cdot(-0{,}002) = 0{,}062.$$

Por consiguiente, $y_4 = y_3 + \Delta y_3 \approx -0{,}754 + 0{,}062 \approx -0{,}692 \approx -0{,}69$.

1168. Haciendo uso del método de Adams, hallar el valor de y (0,5), para la ecuación diferencial $y' = x + y$, $y(0) = 1$; paso $h = 0{,}1$. Realizar los cálculos con precisión de hasta 0,001, dejar en el resultado dos cifras decimales.

1169. Empleando el método de Adams, hallar el valor de y (0,4) para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; el paso $h = 0{,}1$. Realizar los cálculos con el mismo número de cifras que en el ejercicio precedente.

§ 7. Método de Picard de aproximaciones sucesivas

Uno de los métodos analíticos de resolución aproximada de ecuaciones diferenciales es *el de Picard, de aproximaciones sucesivas*. Aplicado a la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, este método consiste en construir la solución buscada $y = y(x)$ para $x \geqslant x_0$ (o para $x \leqslant x_0$). Integrando ambos miembros de la ecuación (1) dentro de los límites de x_0 a x, obtenemos

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt,$$

o bien,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt. \tag{2}$$

Se supone que en cierto entorno del punto $(x_0; y_0)$ la ecuación (1) satisface las condiciones del teorema de existencia y de unicidad (teoremas de Cauchy), o sea, $f(x, y)$ es una función continua de sus argumentos y $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K$.

Para determinar las aproximaciones sucesivas, sustituimos en la igualdad (2) la función incógnita y por el valor dado y_0; obtenemos la primera aproximación

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt.$$

Luego, sustituyendo en vez de la función incógnita y la función hallada y_1 en la igualdad (2), obtenemos la segunda aproximación

$$y_2 = y_2 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt.$$

Todas las aproximaciones ulteriores se construyen por la fórmula

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

De este modo,

$$y(x) \approx y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt.$$

Se puede demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$.

El error se aprecia por la desigualdad

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{M(Kc)^n}{K \cdot n!},$$

donde $|f(x, y)| \leqslant M$, $|x - x_0| < a \leqslant \infty$, $|y - y_0| < b \leqslant \infty$, $c = \min(a, b/M)$.

Las aproximaciones de Picard dan una sucesión de las funciones inferiores, o sea,

$$y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < y(x)$$

si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ y $f(x, y_0) > 0$; y si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ y $f(x, y_0) < 0$, ellas dan una sucesión de las funciones superiores, o sea,

$$y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y(x).$$

De este modo, cuando $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ las aproximaciones de Picard, forman *una sucesión unilateral de aproximaciones*, y cuando $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, *una sucesión bilateral.*

1170. Hallar la solución aproximada de la ecuación $y' = x + y^2$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

Resolución. En calidad de aproximación inicial tomamos $y_0 = y(0) = 1$. Entonces la primera aproximación

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)\, dt = 1 + x + \frac{1}{2} x^2.$$

Análogamente, obtenemos la segunda aproximación

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[t + \left(1 + t + \frac{1}{2} t^2\right)^2 \right] dt =$$

$$= 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{20} x^5,$$

. . . .

1171. ¿Con ayuda de qué sucesión de aproximaciones de Picard se expresa la solución de la ecuación $y' = x + y$, que satisface la condición inicial $y(0) = 0$ para $x \geqslant 0$?

Resolución. En calidad de aproximación inicial tomamos $y_0 = y(0) = 0$. Entonces:

$$y_1 = y_0 + \int_0^x (t + y_0)\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{1}{2} x^2,$$

$$y_2 = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2} t^2\right) dt = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3 = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$

. . . .

$$y_n(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right) dt =$$

$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Aquí, $f(x, y_0) = x + y_0 \geqslant 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 > 0$. Por consiguiente, las aproximaciones de Picard forman una sucesión de las funciones inferiores.

En este caso la expresión analítica real de $y(x)$ tiene la forma

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) - (x+1),$$

o bien

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

1172. Hallar tres soluciones aproximadas sucesivas de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ que satisfagan la condición inicial $y(0) = 0$, tomando en calidad de aproximación inicial $y = 0$.

1173. Hallar la solución aproximada de la ecuación $y' + y.$ ch $x = 0$ que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1$.

1174. Hallar la solución aproximada y determinar el carácter de las aproximaciones de Picard de la ecuación $y' = x - y$; la condición inicial es $y(0) = 1$, $x \geqslant 0$.

1175. Hallar la solución aproximada y determinar el carácter de las aproximaciones de Picard de la ecuación $y' = y \cdot \cos x$; la condición inicial es $y(0) = 1$; $-2 < x < 2$.

1176. Hallar la solución aproximada de la ecuación $y' = 2xy$ $\cos(x^2)$, que satisface la condición inicial $y(0) = 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$. Determinar el carácter de las aproximaciones de Picard.

§ 8. Procedimientos elementales de elaboración de los datos experimentales

1. Procedimiento gráfico. Supongamos que los datos de una prueba están representados en una tabla. Por los puntos determinados por esta tabla o por los que están próximos a ellos, trazamos un gráfico y por el aspecto del mismo seleccionamos el de la fórmula empírica. El caso más simple se considera aquel, para el cual los datos de la prueba llevan a los puntos que se sitúan, aproximadamente, sobre la recta $y = a_0 + a_1 x$ o sobre las rectas cuyas ecuaciones $S = At^{\alpha}$ y $S = Ae^{\alpha t}$ se transforman por la sustitución de las variables, obteniéndose la función lineal. Resolviendo este problema por el procedimiento gráfico, marcamos los puntos sobre el cuadriculado (con escala uniforme o logarítmica) y trazamos la recta aproximadamente por estos puntos de modo que ésta se sitúe lo más cerca posible a cada uno de los puntos marcados y luego tomamos dos puntos arbitrarios sobre esta recta (distantes lo más lejos posible uno del otro) y sustituimos sus coordenadas en la relación $y = a_0 + a_1 x$. De dos ecuaciones obtenidas de este modo hallamos a_0 y a_1.

1177. La distribución estacionaria de la temperatura en una varilla fina termoaislada se describe por la función lineal $u = a_0 + a_1 x$. Determinar las constantes a_0 y a_1 si se da la tabla de temperaturas medidas en los puntos correspondientes de la varilla:

x	0	2	6	8	10	14	16	20
u	32	29,2	23,3	29,9	17,2	11,3	7,8	2

Resolución. Construyendo los puntos correspondientes a la tabla dada, vemos que la recta pasa por los puntos (0; 32) y (20; 2). Sustituyendo sus coordenadas en la ecuación $u = a_0 + a_1 x$, tenemos

$$\begin{cases} a_0 + 0 \cdot a_1 = 32, \\ a_0 + 20a_1 = 2; \end{cases} \quad a_0 = 32, \quad a_1 = -1,5.$$

De aquí, obtenemos la relación buscada $u = 32 - 1,5x$.

Hasta qué punto responde esta fórmula a los datos de tabla, se puede juzgar por la magnitud de la suma de desviaciones δ y la suma de los cuadrados de desviaciones δ^2 de los valores de la función determinados por la fórmula en comparación con los valores de tabla. En el ejemplo dado $\delta = -1,5x + 32 - u$. Por consiguiente,

$$\delta_1 = -1,5 \cdot 0 + 32 - 32 = 0; \qquad \delta_2 = -1,5 \cdot 2 + 32 - 29,2 = -0,2;$$
$$\delta_3 = -1,5 \cdot 6 + 32 - 23,3 = -0,3; \qquad \delta_4 = -1,5 \cdot 8 + 32 - 19,9 = 0,1;$$
$$\delta_5 = -1,5 \cdot 10 + 32 - 17,2 = -0,2; \qquad \delta_6 = 1,5 \cdot 14 + 32 - 11,3 = -0,3;$$
$$\delta_7 = -1,5 \cdot 16 + 32 - 7,8 = 0,2; \qquad \delta_8 = -1,5 \cdot 20 + 32 - 2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{8} \delta_i = -0,7; \qquad \sum_{i=1}^{8} \delta_i^2 = 0,31.$$

1178. Los datos de tabla responden a la fórmula $S = At^{\alpha}$. Hallar

t	1	2	3	4	5	6	7
S	2,31	2,58	2,77	2,93	3,06	3,16	3,26

los valores de A y α.

Resolución. Determinando por logaritmos la igualdad $S = At^{\alpha}$, obtenemos $\log S = \log A + \alpha \cdot \log t$; haciendo $\log S = y$, $\log t = x$, $\log A = a_0$, $\alpha = a_1$, tenemos $y = a_0 + a_1 x$. De gráfico de la ecuación lineal obtenida sirve una recta, los parámetros de su ecuación los hallamos tomando dos puntos sobre esta recta, por ejemplo ($\log 1$; $\log 2,31$) y ($\log 7$; $\log 3,26$). Sustituyendo las coordenadas de estos puntos en la ecuación $y = \log A + \alpha x$, obtenemos

$$\begin{cases} \log 2,31 = \log A + \alpha \cdot \log 1 \\ \log 3,26 = \log A + \alpha \cdot \log 7, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} \log A = 0,364, \\ \log A + 0,845\alpha = 0,513. \end{cases}$$

De aquí, $\log A = 0,364$, $A = 2,312$; $\alpha = 0,149/0,845 = 0,176$, por consiguiente, $S = 2,312t^{0,176}$.

1179. Los datos de tabla responden a la fórmula $y = a_0 + a_1 x$. Hallar a_0 y a_1.

x	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
y	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

1180. Los datos de tabla responden a la fórmula $S = Ae^{\alpha t}$. Hallar A y α.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
S	15,3	20,5	27,4	36,6	49,1	65,6	87,8	117,6

2. Procedimiento de medias. *El procedimiento de medias* se basa en la admisión de que de línea más conveniente sirve aquella, para la cual la suma algebraica de las desviaciones es igual a cero. Para encontrar por este procedimiento las constantes desconocidas en la fórmula empírica, primeramente sustituimos en esta fórmula todos los pares de los valores observados o medidos de x e y y obtenemos tantas desviaciones cuantos pares de valores $(x;\ y)$ se tienen en la tabla (las desviaciones son las distancias verticales desde los puntos dados al gráfico de la función). Luego distribuimos estas desviaciones por grupos, formando tantos grupos como parámetros desconocidos de la fórmula empírica es necesario determinar. Por último, igualando a cero la suma de desviaciones en cada grupo, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales con respecto a los parámetros.

1181. Hallar por procedimiento de medias la fórmulas $S = At^{\alpha}$ correspondiente a la tabla

t	273	283	288	293	313	333	353	373
S	29,4	33,3	35,2	37,2	45,8	55,2	65,6	77,3

Resolución. Aquí las desviaciones tienen la forma $\delta = At^{\alpha} - S$. Sustituyendo los valores de t y S tomados de la tabla igualando a cero las desviaciones, obtenemos el sistema de ecuaciones respecto a los parámetros A y α cuya solución es dificultosa. Sin perder mucho en la exactitud se puede igualar a cero la suma de desviaciones del logaritmo de S, o sea, $\delta' = \log A + \alpha \log t - - \log S$.

Entonces las desviaciones se expresan por las fórmulas:

$$\delta_1' = \log A + 2{,}4362\alpha - 1{,}4683, \qquad \delta_5' = \log A + 2{,}4955\alpha - 1{,}6609,$$
$$\delta_2' = \log A + 2{,}4518\alpha - 1{,}5224, \qquad \delta_6' = \log A + 2{,}5224\alpha - 1{,}7419,$$
$$\delta_3' = \log A + 2{,}4594\alpha - 1{,}5465, \qquad \delta_7' = \log A + 2{,}5478\alpha - 1{,}8169,$$
$$\delta_4' = \log A + 2{,}4669\alpha - 1{,}5705, \qquad \delta_8' = \log A + 2{,}5717\alpha - 1{,}8882.$$

Igualando a cero las desviaciones en estos dos grupos, obtenemos el sistema de ecuaciones para determinar los parámetros A y α:

$$\begin{cases} 4 \log A + 9{,}8143\alpha = 6{,}1077, \\ 4 \log A + 10{,}1374\alpha = 7{,}1079. \end{cases}$$

La solución de este sistema es $\alpha = 3{,}096$, $\log A = \bar{7}{,}9345$; de aquí, $A = 8{,}5 \cdot 10^{-7}$. Por lo tanto, $S = 8{,}6 \cdot 10^{-7}\ t^{3{,}096}$.

1182. Se da la tabla. Hallar los parámetros a_0, a_1, a_2, de la fórmula $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, correspondiente a esta tabla.

x	87,5	84,0	77,8	63,7	46,7	36,9
y	292	283	270	235	197	181

1183. Se da la tabla que responde a la fórmula $S = At^{\alpha}$. Hallar A y α.

t	53,92	26,36	14,00	6,99	4,28	2,75	1,85
S	6,86	14,70	28,83	60,40	101,9	163,3	250,3

3. Selección de los parámetros por el procedimiento de cuadrados mínimos. 1). En la práctica se necesita con frecuencia resolver un problema así. Sean conocidos para dos variables x e y, relacionadas funcionalmente, n pares de valores correspondientes $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$. Se exige en la fórmula dada de antemano $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ determinar m parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m < n)$ de modo que en esta fórmula «se coloquen» del modo mejor n pares conocidos de valores de x e y.

Se considera (partiendo de los principios de la teoría de las probabilidades) que los mejores son aquellos valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ que minimizan la suma

$$\sum_{k=1}^{k=n} [f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) - y_k]^2,$$

(o sea, la suma de los cuadrados de desviaciones de los valores de y calculados por la fórmula, con respecto a los valores dados); por eso, este procedimiento ha recibido el nombre de *método de los cuadrados mínimos*.

Esta condición determina un sistema de m ecuaciones, que permiten calcular $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} [f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) - y_k] \frac{\partial f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{\partial \alpha_j} = 0 \qquad (1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

En la práctica la fórmula dada $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ se necesita a veces transformarla (en perjuicio de la rigurosidad de la solución obtenida) ne un modo tal que el sistema (1) se resuelva más sencillamente (véase a continuación la selección de los parámetros en las fórmulas $y = Ae^{cx}$ e $y = Ax^q$).

Casos particulares. a) $y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ ($m + 1$ parámetros $a_0, a_1, \ldots, a_m$; $n > m + 1$).

El sistema (1) adopta la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m-1} + \ldots + n\cdot a_m = \sum\limits_{k=1}^{k=n} y_k, \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m} + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k y_k, \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+2} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 y_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{2m} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{2m-1} + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m y_k. \end{array}\right. \tag{2}$$

Este sistema de $m + 1$ ecuaciones con $m + 1$ incógnitas tiene siempre solución única, ya que su determinante es distinto de cero.

Para determinar los coeficientes del sistema (2) es cómodo construir una tabla auxiliar de la siguiente forma

k	x_k	x_k^2	x_k^3	$\ldots$	x_k^{2m}	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$	$\ldots$	$x_k^m y_k$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	$\ldots$	x_1^{2m}	y_1	x_1y_1	$x_1^2y_1$	$\ldots$	$x_1^my_1$
2	x_2	x_2^2	x_2^3	$\ldots$	x_2^{2m}	y_2	x_2y_2	$x_2^2y_2$	$\ldots$	$x_2^my_2$
.	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
.	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
n	x_n	x_n^2	x_n^3	$\ldots$	x_n^{2m}	y_n	x_ny_n	$x_n^2y_n$	$\ldots$	$x_n^my_n$
$\sum$										

En la última fila se escriben las sumas de los elementos de cada columna que son precisamente los coeficientes del sistema (2). El sistema (2) se resuelve generalmente por el método de Gauss.

b) $y = Ae^{cx}$.

Para simplificar el sistema (1) esta fórmula que relaciona x e y, se determina previamente por logaritmos y se reemplaza por la fórmula

$$\log y = \log A + c\cdot\log e\cdot x.$$

En este caso el sistema (1) adquiere la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} c\cdot\log e\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k + n\cdot\log A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log y_k, \\ c\cdot\log e\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 + \log A\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k\cdot\log y_k. \end{array}\right. \tag{3}$$

La tabla auxiliar tiene la forma

k	x_k	x_k^2	$\log y_k$	$x_k \cdot \log y_k$
1	x_1	x_1^2	$\log y_1$	$x_1 \cdot \log y_1$
2	x_2	x_2^2	$\log y_2$	$x_2 \cdot \log y_2$
...	...	...	...	...
n	x_n	x_n^2	$\log y_n$	$x_n \cdot \log y_n$
$\sum$				

Del sistema (3) se determinan c y $\log A$.

c) $y = Ax^q$.

A esta fórmula también se le aplican previamente logaritmos, y se reemplaza por la siguiente

$$\log y = \log A + q \cdot \log x.$$

Ahora el sistema (1) adquiere la forma

$$\begin{cases} q \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log x_k + n \cdot \log A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log y_k, \\ q \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log^2 x_k + \log A \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log x_k \cdot \log y_k. \end{cases} \tag{4}$$

En correspondencia, se cambia también la tabla auxiliar.

2) Frecuentemente se necesita sustituir del modo mejor cierta función dada $y = f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ por el polinomio de m-ésimo grado: $y \approx a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$. En este caso la aplicación del método de los cuadrados mínimos lleva a la determinación de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$, a partir de la condición del mínimo de la integral

$$\int\limits_a^b [\varphi(x) - f(x)]^2\,dx = \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)]^2\,dx.$$

Las condiciones necesarias del mínimo de esta integral llevan a un sistema de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, a partir del cual se determinan todos estos coeficientes:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)] \cdot x^m\,dx = 0, \\ \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)] \cdot y^{m-1}\,dx = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)] \cdot dx = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1184. Por el método de los cuadrados mínimos, escoger para los valores dados de x e y la función cuadrática $\varphi(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$:

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

Resolución. Componemos la tabla

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	x_ky_k	$x_k^2y_k$
1	7	49	343	2 401	7,4	51,8	362,6
2	8	64	512	4 096	8,4	67,2	537,6
3	9	81	729	6 561	9,1	81,9	737,1
4	10	100	1000	10 000	9,4	94,0	940,0
5	11	121	1331	14 641	9,5	104,5	1149,5
6	12	144	1727	20 736	9,5	114,0	1368,0
7	13	169	2197	28 561	9,4	122,2	1588,6
$\sum$	70	728	7840	87 096	62,7	635,6	6683,4

De aquí, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 728a_0+70a_1+7a_2=62{,}7, \\ 7840a_0+728a_1+70a_2=635{,}6, \\ 87\,096a_0+7840a_1+728a_2=6683{,}4. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $a_0 = -0{,}04$, $a_1 = 1{,}10$, $a_2 = 2{,}12$. Ahora bien, la función cuadrática buscada tiene la forma $\varphi(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}10x + 2{,}12$.

1185. Por el método de los cuadrados mínimos, escoger la función potencial $S = At^q$ por los datos de la tabla siguientes

t	1	2	3	4	5
S	7,1	27,8	62,1	110	161

Resolución. Componemos la tabla

k	$x_k = \log t_k$	x_k^2	$y_k = \log S_k$	$x_k y_k$
1	0,0000	0,0000	0,8513	0,0000
2	0,3010	0,0906	1,4440	0,4346
3	0,4771	0,2276	1,7931	0,8555
4	0,6021	0,3625	2,0414	0,2291
5	0,6990	0,4886	2,2068	1,5425
$\sum$	2,0792	1,1693	8,3366	4,0637

De este modo, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2{,}0792q+5\log A=8{,}3366, \\ 1{,}1693q+2{,}0792\log A=4{,}0637. \end{cases}$$

De aquí, $q = 1{,}958$, $\log A = 0{,}8532$, o sea, $A = 7{,}132$. Por lo tanto, la función potencial buscada tiene la forma $S = 7{,}132t^{1,958}$.

1186. Por el método de los cuadrados mínimos, escoger la función potencial $S = Ae^{ct}$ por los datos de la tabla siguiente:

t	0	2	4	6	8	10	12
S	1280	635	324	162	76	43	19

Resolución. Componemos la tabla

k	t	t^2	$y = \log S$	ty
1	0	0	3,1072	0,0000
2	2	4	2,8028	5,6056
3	4	16	2,5105	10,0420
4	6	36	2,2095	13,2570
5	8	64	1,8808	15,0464
6	10	100	1,6335	16,3350
7	12	144	1,2787	15,3444
$\sum$	42	364	15,4230	75,6304

Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 42c\cdot\log e+7\log A=15{,}4230 \\ 364c\cdot\log e+42\log A=75{,}6304, \end{cases}$$

o sea, $c \cdot \log e = -0{,}1509$, $\log A = 3{,}1087$. Por consiguiente, $A = 1284$ y $c = -0{,}347$. De este modo, la forma potencial buscada tiene la forma $S = 1284e^{-0{,}347t}$.

En los problemas siguientes, valiéndose del método de los cuadrados mínimos, escoger las funciones de la forma dada por los datos de tabla citados.

1187. Hallar la función lineal:

1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

2)

x	1	4	9	16	25
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

3)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

1188. Hallar la función cuadrática:

1)

x	7	8	9	10	11	12	13
y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,4	5,9

2)

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

3)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−0,71	−0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

1189. Hallar la función potencial $S = At^q$:

t	1	2	3	4	5
S	7,1	15,2	48,1	96,3	150,1

1190. Hallar la función exponencial $S = Ae^{ct}$:

1)

t	2,2	2,7	3,5	4,1
S	67	60	53	50

2)

t	1	3	5	7	9	11
S	0,75	1,81	5,34	10,86	24,52	59,00

1191. Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$ con un polinomio de tercer grado.

Resolución. Para determinar los coeficientes de la función $\varphi(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ escribimos el sistema de ecuaciones de la forma (5):

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) x^3\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) x^2\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) x\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) dx = 0. \end{cases}$$

Integrando, obtenemos

$$\begin{cases} \frac{1}{7}a_0 + \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{1}{4}a_3 = \frac{12}{\pi^2} - \frac{96}{\pi^4}, \\ \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{8}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^3}, \\ \frac{1}{5}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_3 = \frac{4}{\pi^2}, \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + a_3 = \frac{2}{\pi}. \end{cases}$$

Resolviendo el último sistema, hallamos $a_0 = -0{,}40$, $a_1 = -0{,}24$, $a_2 = 1{,}64$, $a_3 = -0{,}05$.
Por consiguiente,

$$\varphi(x) = -0{,}4x^3 - 0{,}24x^2 + 1{,}64x - 0{,}05.$$

Comprobación: si $x = 1/3$, entonces $f(1/3) = 0{,}50$, $\varphi(1/3) = 0{,}51$.

1192. Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = \ln(4 + x)$, con un polinomio de tercer grado, si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1193. Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = 1/(1 + x)$, con un polinomio de tercer grado, si $0 < x < 1$.

Capítulo X.

Fundamentos del cálculo de variaciones

§ 1. Introducción

1. Concepto de funcional. Unos de conceptos fundamentales del análisis matemático es el de función. En el caso elemental la noción de dependencia funcional puede ser expresada así. Sea C un conjunto cualquiera de números reales. Si a cada número x del conjunto C le corresponde cierto número y, entonces se dice que sobre el conjunto C está definida la función $y = f(x)$. El conjunto C se llama campo de definición de la función f.

Sin embargo, en muchos casos el concepto de función no es suficiente. Así, por ejemplo, la intensidad del campo electromagnético en un lugar dado, originada por el paso de una corriente en el conductor, depende de la forma de la curva a lo largo de la cual está situado este último. El concepto de funcional es generalización directa y natural del de función y lo contiene como caso particular.

Sea C un conjunto de objetos cualesquiera. Éstos pueden ser números, puntos del espacio, líneas, funciones, superficies, etc. Si a cada elemento x de C le corresponde cierto número real y, entonces se dice que sobre el conjunto C está definida la funcional $y = I(x)$. Si el conjunto C es un conjunto de números x, entonces la funcional $y = I(c)$ no es más que la función de un argumento. Cuando C es el conjunto de un par de números (x_1, x_2), la funcional será la función $y = I(x_1, x_2)$ de dos argumentos, etc. En el cálculo de variaciones se examinan funcionales cuyo campo de definición C son conjuntos de funciones $y(x)$.

1194. Resolver $I[y(x)] = \int\limits_0^1 [y(x)]^2\,dx$.

Resolución. Si en vez de $y(x)$ se sustituyen diferentes funciones concretas, por ejemplo, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = \sqrt{1+x^2}$, entonces obtenemos, respectivamente: $I(y_1) = \frac{1}{3}$, $I(y_2) = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$, $I(y_3) = \frac{4}{3}$.

El cálculo de variaciones tiene por objeto determinar los valores máximos y mínimos de las funcionales definidas sobre conjuntos de líneas o superficies. Con ellos, al igual que en el ejemplo citado anteriormente, las funcionales se dan por medio de ciertas integrales definidas.

Las funciones pertenecientes al campo de definición C de la funcional dada I, las llamaremos funciones de comparación o funciones admisibles.

2. Clases de las funciones y entornos. En adelante se utilizarán las siguientes clases de funciones, dadas sobre cierto segmento $[x_0, x_1]$:

1) $C[x_0, x_1]$, la clase de funciones continuas;
2) $C^{(1)}[x_0, x_1]$, la clase de las funciones suaves (es decir, las que tienen ontinuas las primeras derivadas);

3) $C^{(m)}[x_0, x_1]$, la clase de las funciones que tienen continuas m-ésimas derivadas.

Para las funciones que forman parte de las clases recién citadas se introduce el concepto de distancia. A saber, si $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ son funciones pertenecientes a la clase $C[x_0, x_1]$, entonces se llama distancia entre ellas al número $\rho_0 = \rho_0(y_1, y_2) = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1(x) - y_2(x)|$ (distancia de orden nulo). Si $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ pertenecen a la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$, entre ellas se puede introducir la distancia del modo siguiente: $\rho_1 = \rho_1(y_1, y_2) = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1(x) - y_2(x)| + \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1'(x) - y_2'(x)|$ (distancia de primer orden). De un modo análogo entre las funciones que forman parte de la clase $C^{(m)}[x_0, x_1]$ se puede introducir la distancia de m-ésimo orden.

1195. Hallar la distancia de orden nulo entre las funciones $y = x^2$ e $y = x$ sobre el segmento $[0, 1]$.

Resolución. $\rho_0 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |x^2 - x|$. Sobre los extremos del segmento $[0, 1]$ la función $y = x^2 - x$ toma los valores iguales a cero. Investiguémosla para determinar los extremos sobre el intervalo $]0, 1[$. Tenemos: $y' = 2x - 1 = 0$ cuando $x = \frac{1}{2}$. Con ello $y''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$. De suerte que en el punto $x = \frac{1}{2}$ la función analizada tiene un mínimo, igual a $-\frac{1}{4}$. Por eso $|x^2 - x|$ toma en el punto $x = \frac{1}{2}$ el valor máximo sobre el segmento $[0, 1]$, igual a $\frac{1}{4}$ y $\rho_0 = \frac{1}{4}$.

Sea el número $\varepsilon > 0$. Se llama entorno ε de orden nulo de la función $\bar{y}(x)$ de la clase $C[x_0, x_1]$, al conjunto de todas las funciones $y(x)$ de esta clase, tales que $\rho_0(y, \bar{y}) < \varepsilon$. Gráficamente esto quiere decir que las curvas $y = y(x)$ e $y = \bar{y}(x)$ dadas en el segmento $[x_0, x_1]$ son próximas por sus ordenadas.

Se denomina entorno ε de primer orden de la función $\bar{y}(x)$ de la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$ al conjunto de todas las funciones $y(x)$ de esta clase, tales que $\rho_1(y, \bar{y}) < \varepsilon$. Gráficamente esto significa que las curvas $y = y(x)$ e $y = \bar{y}(x)$ sobre el segmento $[x_0, x_1]$ son próximas tanto por las ordenadas como por el coeficiente angular de las tangentes de los puntos con abscisas iguales. Análogamente, se puede introducir el entorno ε de m-ésimo orden de la función $\bar{y}(x)$ perteneciente a la clase $C^{(m)}[x_0, x_1]$.

1196. Aclarar en qué entornos de la función dada $y(x) \equiv 0$ sobre el segmento $[0, 2\pi]$ van a parar las funciones que forman parte de la sucesión $y_n(x) = \frac{\cos nx}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Resolución. Puesto que

$$|y_n(x) - y(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

las funciones $y_n(x)$ pertenecen a un entorno ε cualquiera de orden nulo de la función $\bar{y}(x) \equiv 0$, siempre que n sea suficientemente grande. Para el entorno ε de primer orden, esto ya no es justo, como lo muestran las igualdades

$$|y_n'(x) - \bar{y}'(x)| = \left|-\frac{n}{n+1} \operatorname{sen} nx\right| = \frac{n}{n+1}, \quad \text{si } x = \frac{\pi}{2n},$$

$$\text{y} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

En tales casos se dice que entre la función $\bar{y}(x)$ y la sucesión $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene lugar un orden nulo de proximidad.

3. Extremos de las funcionales. Sea C una clase de funciones de comparación de la funcional I.

Se dice que la funcional I tiene en esta clase el mínimo (máximo) absoluto concedido por la función $\bar{y}(x)$ de la clase C, si para toda función $y(x)$ de esta clase tiene lugar la desigualdad

$$I[y(x)] \geqslant I[\bar{y}(x)] \qquad (I[y(x)] \leqslant I[\bar{y}(x)]). \tag{1}$$

Se dice que la funcional I tiene en la clase C el mínimo (máximo) relativo concedido por la función $\bar{y}(x)$ de la clase C, si existe un entorno ε de la función $\bar{y}(x)$ que para toda función $y(x)$ de la clase C de este entorno ε se cumpla la desigualdad (1).

El mínimo (máximo) relativo se llama fuerte, si la desigualdad(1) se cumple para todas las funciones de comparación $y(x)$ pertenecientes a cierto entorno ε de orden nulo de la función $\bar{y}(x)$. El mínimo (máximo) relativo se denomina débil, si la desigualdad (1) se cumple para todas las funciones de comparación $y(x)$ situadas en entorno ε de primer orden de la función $\bar{y}(x)$.

De este modo, todo extremo absoluto será un extremo relativo fuerte y débil. Todo extremo relativo fuerte es al mismo tiempo un extremo débil. Sin embargo, hablando en general, un extremo relativo débil no es fuerte.

4. Concepto de variación de una funcional. Haciendo uso de la funcional $I_1[y(x)] = \int\limits_0^1 y^2\,dx$ en calidad de ejemplo, examinemos como cambia su valor cuando se efectúa una pequeña variación de la función $y(x)$, de la cual esta funcional depende. Supongamos que en el segundo miembro ha sido sustituida primeramente cierta función $y(x)$ y luego se introduce una función nueva $y(x) + \delta y(x)$, donde $\delta y(x)$, llamada variación de $y(x)$, es una función arbitraria que toma valores pequeños. Por ejemplo, primeramente podría ser $y = x^2$ y luego $y = x^2 + \alpha \cdot x(1 - x)$ donde la constante α es pequeña. Entonces cambiará también el valor de la función y llegará a ser igual a

$$\int\limits_0^1 (y + \delta y)^2\,dx = \int\limits_0^1 y^2\,dx + 2\int\limits_0^1 y \cdot \delta y\,dx + \int\limits_0^1 (y)^2\,dx.$$

De este modo, en el ejemplo examinado el incremento de la funcional será $\Delta I_1 = 2\int\limits_0^1 y \cdot \delta y\,dx + \int\limits_0^1 (\delta y)^2\,dx$. Si se fija la función $y(x)$ y se cambia su variación δy, entonces vemos que el primer término del segundo miembro es lineal con respecto a δy y el segundo es cuadrático. El primer término en el incremento de la funcional se llama variación de la funcional y se designa por δI_1, o sea, $\delta I_1 = 2\int\limits_0^1 y \cdot \delta y\,dx$. Así, pues, con una precisión de hasta los términos de orden superior de pequeñez $\Delta I_1 \approx \delta I_1$.

Examinemos ahora el caso de una funcional general que tiene la forma

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

donde F es cierta función conocida de tres variables. Si en vez de $y(x)$ en la integral se sustituye la función $y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$, donde $\eta(x)$ es cierta función fija de la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$ tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, entonces obtenemos la función del parámetro α:

$$I(\alpha) = \int_{x_0}^{x} F[x, y(x) + \alpha\cdot\eta(x), y'(x) + \alpha\cdot\eta'(x)]\,dx.$$

Escribimos su desarrollo formal en serie de Maclaurin:

$$I(\alpha) = I(0) + \frac{\alpha}{1!}\cdot y'(0) + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot I'(0) + \dots .$$

Las expresiones $\alpha\cdot I'(0)$ y $\alpha^2\cdot\frac{I''(0)}{2}$ aquí obtenidas se llaman primera y segunda variación de la funcional I, y se designan por los símbolos δI y $\delta^2 I$. Para la funcional examinada en el ejemplo citado anteriormente obtenemos $\delta I =$

$$= \alpha\cdot I_1'(0) = 2\int_0^1 y(x)\times\alpha\cdot\eta(x)\,dx.$$

Esta magnitud coincide con la citada arriba, cuando la variación de la función $y(x)$ es igual $\delta y = \alpha\cdot\eta(x)$.

5. Lemas principales. Lema I (de Lagrange). Si $f(x)$ es una función continua sobre el segmento $[x_0, x_1]$ y si $\int_0^{x_1} f(x)\times\eta(x)\,dx = 0$ para una función $\eta(x)$ cualquiera que sea derivable continuamente m veces e igual a cero sobre los extremos del segmento $[x_0, x_1]$ junto con todas sus derivadas de k-ésimo orden ($k \leqslant m$), luego $f(x) \equiv 0$.

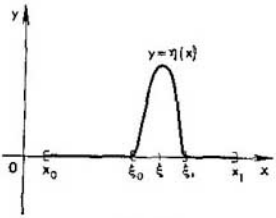

Fig. 85

Demonstración. Admitamos lo contrario. Entonces en cierto punto interior ξ del segmento $[x_0, x_1]$ $f(\xi) \neq 0$. Supongamos que para la definibilidad $f(\xi) > 0$. En virtud de la continuidad $f(x)$, se puede señalar tal subsegmento $[\xi_0, \xi_1] \subset [x_0, x_1]$ en el cual $f(x) > 0$. Definimos ahora $\eta(x)$ así (fig. 85):

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \text{ fuera del segmento } [\xi_0, \xi_1], \\ [(\xi_1 - x)(x - \xi_0)]^{m+1} \text{ para } \xi_0 \leqslant x \leqslant \xi_1. \end{cases}$$

No es difícil comprobar que la función $\eta(x)$ es m veces continuamente derivable sobre el segmento $[x_0, x_1]$ y, junto con todas sus derivadas de hasta el m-ésimo orden, inclusive, se anula sobre los extremos del segmento $[x_0, x_1]$. Por eso

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x)\,[(\xi_1 - x)(x - \xi_0)]^{m+1}\,dx > 0.$$

La contradicción obtenida demuestra el lema.

Generalización del lema I. Es evidente que el lema I se extiende también sobre las integrales que tienen la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} [\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3]\,dx,$$ donde f_1, f_2, f_3, son funciones

continuas en el intervalo $[x_0, x_1]$, η_1, η_2, η_3, son funciones que satisfacen las mismas condiciones que $\eta(x)$. Para que esta integral sea igual a cero para todas las funciones posibles η_1, η_2, η_3 que satisfacen las condiciones indicadas, es necesario que las funciones f_1, f_2, f_3, sean idénticamente iguales a cero.

Lema 2 (de Ostrogradski). Si $f(x, y)$ es una función continua en la región D, y si $\iint\limits_D f(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy = 0$ para toda función $\eta(x, y)$, continua junto con sus derivadas parciales de primer orden en la región D e igual a cero sobre el contorno Γ, que acota la región D, entonces $f(x, y) \equiv 0$.

Demostración. Procediendo del modo análogo a la demostración del primer lema, pongamos que en cierto punto (ξ, ζ) dentro de la región D, la función $f(x, y) > 0$. Entonces ella será positiva en cierto círculo ubicado dentro de la región D con centro en (ξ, ζ) y radio $\rho > 0$. Definimos la función $\eta(x, y)$ del modo siguiente:

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ para } (x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 > \rho^2, \\ [(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 - \rho^2]^2, \text{ para } (x-\xi)^2 + (y-\zeta^2) \leqslant \rho^2. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\eta(x, y)$ satisface las condiciones del lema y la integral se reduce a la de una función positiva continua sobre el contorno mencionado, lo que contradice la condición del lema.

§ 2. Condición necesaria del extremo de una funcional

$$I = \int\limits_{K}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

1. Ecuación de Euler. Examinemos una funcional $I[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$, donde F es la función dada de tres variables, junto con las derivadas parciales respecto a todas las variables de segundo orden, inclusive, para todos los puntos pertenecientes a cierta región plana D que tienen por coordenadas x, y, y para todos los valores finitos de y'. El conjunto C de las funciones de comparación lo definamos así: cada función $y(x)$ pertenece a la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$ con ello la curva $y = y(x)$ está por completo en la región D e $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, donde y_0 e y_1, son ciertos números constantes.

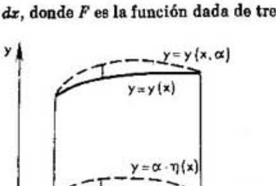

Fig. 86

Investiguemos el extremo de la funcional dada. Para esto tomemos una función $\eta(x)$ cualquiera que satisfaga las condiciones del lema de Lagrange. Formemos la función $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\cdot\eta(x)$, donde α es un parámetro numérico pequeño (fig. 86). Esta función satisface las mismas condiciones de frontera que $y(x)$.

Sustituyéndola en la funcional, obtenemos la función de α:

$$I(\alpha) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F[x, y(x) + \alpha\cdot\eta(x), y'(x) + \alpha\cdot\eta'(x)]\,dx.$$

Cualquiera $\varepsilon > 0$ que sea dada la función $y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$ está en el entorno ε (hasta el de primer orden) de la línea $y(x)$, para todos los valores del parámetro α suficientemente próximos a cero. Por consiguiente, si $y(x)$ da el extremo a la funcional I, entonces la función $I(\alpha)$ debe tener extremo cuando $\alpha = 0$ y por eso su derivada debe anularse cuando $\alpha = 0$. Derivando bajo el signo integral, obtenemos:

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)]\, dx.$$

Efectuemos la integración por partes en el segundo sumando. Haciedo $u = F_{y'}$ y $dv = \eta'(x)\, dx$, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\, dx = F_{y'} \cdot \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \frac{d}{dx}(F_{y'})\, dx.$$

Aquí el término extraintegral es igual a cero, ya que según los datos $\eta(x)$ se anula en los extremos del intervalo $[x_0, x_1]$. Por consiguiente,

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\left[F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'})\right] dx = 0.$$

Aplicando el lema de Lagrange, podemos afirmar que la curva $y(x)$ que da el extremo a la integral debe satisfacer la ecuación diferencial

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0,$$

o bien en la anotación desarrollada:

$$y'' \cdot F_{y'y'} + y' \cdot F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0.$$

Esta ecuación fue obtenida por *L.* Euler y suele llamarse ecuación de Euler. Es una ecuación diferencial de segundo orden con respecto a la función desconocida $y(x)$. La solución general de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 que deben determinarse de las condiciones de frontera: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Las curvas integrales de la ecuación de Euler se denominan extremales. Para que una extremal pase por dos puntos: $M(x_0, y_0)$ y $N(x_1, y_1)$ debemos escoger las constantes C_1 y C_2 de modo que $\varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0$ y $\varphi(x_1, C_1, C_2) = y_1$, donde $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ es la solución general de la ecuación de Euler.

2. Casos particulares de integrabilidad de la ecuación de Euler. Caso 1. La función F no depende de y', o sea, $F = F(x, y)$. Entonces en la ecuación de Euler los términos que contienen las derivadas parciales respecto a y' son iguales a cero y ella toma la forma $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Esta ecuación no es diferencial con respecto a la función desconocida $y(x)$. Define una o varias funciones que, hablando en general, no satisfacen las condiciones de frontera $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Por lo tanto, en el caso general la solución del problema de variaciones en examen no existe. Sólo en casos especiales habrá una curva $y = y(x)$ que pase por los puntos $M(x_0, y_0)$ y $N(x_1, y_1)$ y sea la solución de la ecuación funcional $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

1197. Resolver $I[y(x)] = \int_0^1 (x \operatorname{sen} y + \cos y)\, dx, \quad y(0) = 0,$ $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

Resolución. Aquí $F = x \operatorname{sen} y + \cos y$; la ecuación de Euler tiene la forma: $\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos y - \operatorname{sen} y = 0$, $\Rightarrow y = \operatorname{arctg} x$. Esta ecuación satisface las condiciones de frontera.

1198. Resolver $I[y(x)] = \int_1^e (xe^y - ye^x)\,dx$, $y(1) = 1$, $y(e) = 1$.

Resolución. $F = xe^y - ye^x$; la ecuación de Euler será: $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y - e^x$, $\Rightarrow y = x - \ln x$. La solución obtenida no satisface las condiciones de frontera.

Caso 2. F depende linealmente de y', o sea, $F = P(x, y) + y' \cdot Q(x, y)$. La ecuación de Euler tiene la forma:

$$y' \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - y' \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

La ecuación obtenida no es diferencial con respecto a la función incógnita $y(x)$ y, hablando en general, no tiene soluciones que satisfagan las condiciones de frontera dadas. Sin embargo, si respecto a ambas variables x e y $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces la expresión $P\,dx + Q\,dy$ es la diferencial total y por eso la integral curvilínea

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (P + y' \cdot Q)\,dx = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy$$

no depende del camino de integración. Por consiguiente, el valor de la funcional I es constante sobre todas las curvas admisibles y el problema de variaciones pierde el sentido.

1199. Resolver $I[y(x)] = \int_\alpha^\beta [(xy' + 1)e^y + x^2 - y^2 y']\,dx$, $y(\alpha) = a$, $y(\beta) = b$.

Resolución. Aquí F depende linealmente de y':

$$F = (xy' + 1)e^y + x^2 - y^2 y' = (xe^y - y^2)y' + (x^2 + e^y), \text{ o sea,}$$

$$P(x, y) = x^2 + e^y, \quad Q(x, y) = xe^y - y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La expresión $(x^2 + e^y)\,dx + (xe \quad - y^2)\,dy$ es la diferencial total y, por consiguiente, la integral no depende de la ruta de integración:

$$I[y(x)] = \int_{(\alpha, a)}^{(\beta, b)} (x^2 + e^y)\,dx + (xe^y - y^2)\,dy = \int_{(\alpha, a)}^{(\beta, b)} d\left(xe^y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3\right) =$$

$$= \left(xe^y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{(\alpha, a)}^{(\beta, b)} = \beta e^b - \alpha e^a + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} + \frac{a^3 - b^3}{3}.$$

El valor de la funcional I es constante para todas las curvas $y(x)$ que pasan por los puntos (α, a) y (β, b) y el problema de variaciones no tiene sentido.

Caso 3. F depende solamente de y', o sea, $F = F(y')$. En este caso la ecuación de Euler tiene la forma $y'' \cdot F_{y'y'} = 0$. En particular, se obtiene la ecuación $y'' = 0$. Su solución general es $y = C_1 x + C_2$. Aquí de extremales sirven las líneas rectas.

1200. Resolver $I[y(x)] = \int\limits_0 (y'^2 + y' + 1)\,dx$. $M(0,\ 1)$, $N(1,\ 2)$.

Resolución. Aquí $F = y'^2 + y' + 1$, $F_{y'} = 2y' + 1$, $F_y = 0$, $F_{y'y'} = 2$. La ecuación de Euler tiene la forma: $2y'' = 0$, $\Rightarrow y = C_1x + C_2$. Determinemos C_1 y C_2 a partir de la condición de paso de la extremal por los puntos M y N: $C_2 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$; $\Rightarrow C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Ahora bien, de extremal sirve la recta $y = x + 1$.

Caso 4. F depende solamente de x e y', o sea, $F = F(x,\ y')$. Puesto que en este caso $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, la ecuación de Euler será $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ y su primera integral se halla inmediatamente: $\frac{\partial F(x,\ y')}{\partial y'} = C_1$. Despejando y' en esta ecuación e integrando, encontramos la solución general de la ecuación de Euler.

1201. Resolver $I[y(x)] = \int\limits_1^e (xy'^2 - 2y')\,dx$, $y(1) = 1$, $y(e) = 2$.

Resolución. $F = xy'^2 - 2y'$; $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2xy' - 2 = C_1$, $y' = \frac{C_1 + 2}{2x}$, $y = \frac{1}{2}(C_1 + 2)\ln x + C_2$.

Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $1 = C_2$, $2 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 + 1$. De aquí, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. De extremal sirve la línea $y = \ln x + 1$.

Caso 5. F depende solamente de y e y', o sea, $F = F(y,\ y')$. En este caso la ecuación de Euler será: $y''\cdot F_{y'y'} + y'\cdot F_{yy'} - F_y = 0$.

Se halla fácilmente su primera integral. En efecto, examinemos la igualdad

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = y'\cdot F_y + y''\cdot F_{y'} - y''\cdot F_{y'} - y'^2\cdot F_{yy'} - y'\cdot y''\cdot F_{y'y'} =$$
$$= -y'(y''\cdot F_{y'y'} + y'\cdot F_{yy'} - F_y).$$

Si la función de y satisface la ecuación de Euler, entonces el segundo miembro se anula y $F - y'\cdot\frac{\partial F}{dy'} = C_1$ nos da la primera integral de la ecuación de Euler.

1202. (Problema sobre el área mínima de una superficie de revolución). Entre todas las curvas planas suaves que unen los puntos $A(x_0,\ y_0)$ y $B(x_1,\ y_1)$ hallar aquélla que girando alrededor del eje Ox forma la superficie de área mínima.

Resolución. El área de la superficie de revolución se expresa por la integral $S = 2\pi\int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Aquí $F = y\sqrt{1 + y'^2}$ y por eso la ecuación de Euler tiene la primera integral $y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$, o bien $y = C_1\cdot\sqrt{1 + y'^2}$. Tomando $y' = \operatorname{sh} t$, se encuentra $y = C_1\operatorname{ch} t$. De aquí, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1\cdot\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t}\,dt = C_1\,dt$, $x = C_1t + C_2$. Por consiguiente, la curva buscada es la catenaria $y = C_1\cdot\operatorname{ch}\frac{x - C_2}{C_1}$.

El problema tiene solución, siempre que las constantes arbitrarias se determinen del sistema de ecuaciones $\operatorname{ch}\frac{x_0-C_2}{C_1}=\frac{y_0}{C_1}$, $\operatorname{ch}\frac{x_1-C_2}{C_2}=\frac{y_1}{C_1}$.

1203. (Problema sobre la braquistocrona). Entre las líneas que unen dos puntos dados A y B hallar aquélla, moviéndose por la cual un cuerpo material libremente lanzado recorrerá el camino AB en el menor tiempo.

Resolución. Trazamos por los puntos A $(x_0, 0)$ y B (x_1, y_1) el plano vertical (fig. 87). Puesto que el punto pesado se mueve sin velocidad inicial, entonces

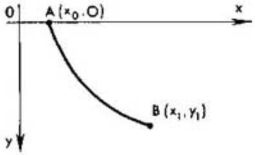

Fig. 87

basándonos en la ley de conservación de la energía, obtenemos

$$\frac{mv^2}{2}=mgy, \quad y(x_0)=0,$$

donde m es la masa del punto, v es la velocidad y g es la aceleración de la gravedad. De aquí, $v=\sqrt{2gy}$. Por otra parte, $v=\frac{dS}{dt}=\sqrt{1+y'^2}\cdot\frac{dx}{dt}$. Entonces $dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gu}}\,dx$. Por lo tanto,

$$T(y)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Para el caso dado la ecuación de Euler tiene la primera integral

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-y'\cdot\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C_1, \quad \text{o bien} \quad y=\frac{1}{C_1^2(1+y'^2)}.$$

Suponiendo $y'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, tenemos $y=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)$. Pos consiguiente,

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot C_1^2}\,dt, \quad \text{o bien} \quad dx=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)\,dt,$$

$$x=\frac{1}{2C_1^2}(t-\operatorname{sen} t)+C_2.$$

De suerte que hemos obtenido las ecuaciones paramétricas de la cicloide

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2C_1^2}(t-\operatorname{sen} t)+C_2, \\ y=\dfrac{1}{2C_1^2}(1-\cos t). \end{cases}$$

Las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan de la condición de paso de la curva por los puntos A y B.

Caso 6. La función F depende solamente de y, o sea $F = F(y)$. En este caso la ecuación de Euler tiene la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

1204. Resolver $I[y(x)]=\int\limits_0^1 (2e^y-y^2)\,dx,\; y(0)=1,\; y(1)=e.$

Resolución. $F = 2e^y - y^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2e^y - 2y$, $\Rightarrow y - e^y$. La última ecuación no tiene hasta las soluciones numéricas. En efecto, si $y < 0$, entonces $e^y > 0$; si $y > 0$, utilizamos el desarrollo $e^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \ldots$ Por eso no hay extremales.

Caso 7. $F = p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 + 2f(x)\cdot y$. La ecuación de Euler para este caso será $\dfrac{d}{dx}(py') - qy - f = 0$. De este modo, hemos determinado que la función $y(x)$ que da el máximo a la integral $I[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} [p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 + 2f(x)\,y]\,dx$ debe satisfacer necesariamente la llamada ecuación diferencial conjugada de segundo orden $\dfrac{d}{dx}(Py') - qy - f = 0$. La solución general de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias. Por lo tanto, por dos puntos dados (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se puede, hablando en general, trazar una curva que satisfaga la ecuación.

1205. Resolver $I[y(x)]=\int\limits_0^{\ln 2} (y'^2+2y^2+2y)\,e^{-x}\,dx,\; y(0)= y(\ln 2)=0.$

Resolución. Aquí $F = (y'^2 + 2y^2 + 2y)\,e^{-x}$. La ecuación de Euler será $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}y') - 2e^{-x}y - e^{-x} = 0$. $y'' - y' - 2y = 1$, $\Rightarrow y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{2}$.

Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $C_1+C_2=\dfrac{1}{2}$, $4C_1+\dfrac{1}{2}C_2=\dfrac{1}{2}$, $\Rightarrow C_1=\dfrac{1}{14}$, $C_2=\dfrac{3}{7}$.

Por consiguiente, $y=\dfrac{1}{14}e^{2x}+\dfrac{3}{7}e^{-x}-\dfrac{1}{2}$.

Resolver

1206. $I[y(x)]=\int\limits_0^1 (y\operatorname{sh} x-y^2\operatorname{ch} x)\,dx,\; y_0=0,\; y_1=1.$

1207. $I[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1} e^y(1+xy')\,dx,\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1.$

1208. $I[y(x)]=\int\limits_0^1 y'^2\,dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

1209. $I[y(x)]=\int\limits_0^1 (xy'-y'^2)\,dx,\ y(0)=1,\ y(1)=\frac{1}{4}.$

1210. $I[y(x)]=\int\limits_{-1}^{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx,\ y(-1)=1,\ y(2)=4.$

1211. $I[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2+1)\,dx,\ y(x_0)=y(x_1)=0.$

1212. $I[y(x)]=\int\limits_0^{3\pi/2} (y^2-2y'^2)\,e^{-x}\,dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{3}{2}\pi\right)=e^{3\pi/4}.$

§ 3. Funcionales dependientes de las derivadas de orden superior

Examinemos ahora el caso cuando la integral contiene derivadas de la función buscada que son de orden superior al primero:

$$I=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})\,dx.$$

Al igual que anteriormente, construimos una curva próxima a la $y(x)+\alpha\cdot\eta(x)$ efectuamos la sustitución en la integral y la derivación respecto a α y hacemos $\alpha=0$. Obtenemos:

$$I'(0)=\int\limits_{x_0}^{x_1} [F_y\eta(x)+F_{y'}\eta'(x)+\ldots+F_{y^{(n)}}\eta^{(n)}(x)]\,dx.$$

Transformamos todos los sumandos del segundo miembro, salvo el primero, integrando por partes varias veces:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}}\,\eta^{(k)}(x)\,dx=\Big[F_{y^{(k)}}\eta^{(k-1)}(x)-\frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}\eta^{(k-2)}(x)+$$

$$+\ldots-(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}F_{y^{(k)}}\eta(x)\Big]_{x_0}^{x_1}+$$

$$+(-1)^k\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}\eta(x)\,dx.$$

Convengamos en que $\eta(x)$ y sus derivadas hasta el orden $n-1$ se anulan en los extremos, debido a lo cual desaparecen los términos extraintegrales. Igualando a cero $I'(0)$, obtenemos una condición que, en virtud del lema principal, nos lleva a la ecuación de Euler—Poisson:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

Esta es una ecuación diferencial de orden $2n$. Su solución general contiene $2n$ constantes arbitrarias y debemos tener todavía $2n$ condiciones de frontera que expresen la definición de los valores de la función y de sus derivadas hasta el orden $n-1$ en los extremos del intervalo. Precisamente, de estas condiciones de frontera se deduce que las magnitudes análogas para $\eta(x)$ deben anularse.

1213. Entre todas las funciones de la clase $C^{(2)}$ que satisfacen las condiciones de frontera: $y(0)=y(\pi)=0$, $y'(0)=y'(\pi)=1$ hallar aquélla que puede conceder el extremo a la funcional

$$I[y(x)]=\int_0^{\pi}(16y^2-y''^2+x^2)\,dx.$$

Resolución. La ecuación de Euler—Poisson tiene la forma: $32y+(-1)^2\times\times\frac{d^2}{dx^2}(-2y'')=0$, o bien $y^{(IV)}-16y=0$. La solución general será: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\operatorname{sen}2x$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $C_1=C_2=C_3=0$, $C_4=\frac{1}{2}$. Por consiguiente, $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$.

Hallar las extremales de las funcionales

1214. $I=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}y''^2\,dx,\ y(x_0)=y(x_1)=0,\ y'(x)=y'(x_1)=0.$

1215. $I=\int_0^1(y''^2+2y'^2+y^2)\,dx,\ y(0)=y(1)=0,\ y'(0)=1,$
$y'(1)=-\operatorname{sh}1.$

§ 4. Funcionales dependientes de dos funciones de una variable independiente

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ z,\ y',\ z')\,dx.$$

En este problema es necesario hallar las curvas $y=y(x)$, $z=z(x)$, que satisfagan las condiciones: $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ y $z(x_0)=z_0$, $z(x_1)=z_1$, que otorgan un valor mínimo a la integral I.

Procedemos igual que en el problema principal elemental. Por curvas próximas tomemos $y(x)+\alpha\cdot\eta_1(x)$ y $z(x)+\alpha\cdot\eta_2(x)$, donde $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$

son funciones arbitrarias de la clase $C^{(1)}$, que se anulan sobre los extremos del segmento $[x_0, x_1]$.

Escribimos la variación de la funcional: $\delta I = \alpha \cdot I'(0)$. Obtenemos

$$\delta I = \alpha \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \eta_1(x) \left[F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) \right] + \eta_2(x) \left[F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) \right] \right\} dx.$$

Puesto que $\delta I = 0$ para todas $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$, entonces, tomando primeramente $\eta_2(x) = 0$ y $\eta_1(x)$ arbitraria, nos convencemos, al utilizar el primer lema, de que el factor de $\eta_1(x)$ es igual a cero; tomando, al contrario, $\eta_1(x) = 0$ y $\eta_2(x)$ arbitraria verificamos que el factor de $\eta_2(x)$ es igual a cero. De este modo, sobre el segmento $[x_0, x_1]$ deben cumplirse las condiciones:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0.$$

Este sistema de ecuaciones con respecto a las funciones buscadas $y(x)$ y $z(x)$ desempeña en este problema el mismo papel que la ecuación de Euler para una función incógnita $y(x)$.

1216. Hallar las extremales de la funcional $I = \int_0^{\pi} (y'^2 - 2y^2 + 2yz - z'^2)\, dx$ si $y(0) = z(0) = 0$, $y(\pi) = z(\pi) = 1$.

Resolución. Aquí el sistema de ecuaciones diferenciales para la funcional dada tiene la forma: $y'' + 2y - z = 0$, $z'' + y = 0$.
Eliminando z, obtenemos la ecuación $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0$ cuya solución general será $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x(C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x)$. En virtud de las condiciones de frontera $C_1 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{\pi} \Rightarrow y = C_2 \operatorname{sen} x + C_4 x \operatorname{sen} x - \frac{x}{\pi} \cos x$. Para z obtenemos $z = C_2 \operatorname{sen} x + C_4 (2 \cos x + x \operatorname{sen} x) + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}(2 \operatorname{sen} x - x \cos x)$. Hallamos las constantes C_2 y C_4 a partir de las condiciones de frontera para z: $C_4 = 0$, C_2 es arbitraria. Entonces,

$$z = C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x).$$

La familia de las extremales tiene la forma:

$$y = C_2 \operatorname{sen} x - \frac{x}{\pi} \cos x,$$

$$z = C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x).$$

1217. Hallar las extremales de las funcionales

$$I = \int_{1/2}^{1} (y'^2 - 2xyz')\, dx, \; y(1/2) = 2, \; z(1/2) = 15, \; y(1) = z(1) = 1.$$

1218. $I=\int_1^2 (z'^2-xy'z)\,dx,\ y(1)=z(1)=1,$
$y(2)=-\frac{1}{6},\ \ z(2)=1/2.$

§ 5. Funcionales dependientes de las funciones de dos variables independientes

$$I=\iint_D F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Designemos $\frac{\partial z}{\partial x}=p, \frac{\partial z}{\partial y}=q$. Sea $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ una función de sus cinco argumentos, continua junto con sus derivadas hasta el segundo orden, inclusive, en cierto campo especial R de valores de las variables x, y, z y para todas las p y q finitas. Sea Γ una curva espacial cerrada cuya proyección sobre el plano xOy es un contorno cerrado simple C, que acota la región D. La ecuación de la superficie S que está situada en el campo R y pasa por la curva Γ la tomamos en la forma $z=f(x,\ y)$, donde la función $f(x,\ y)$, continua junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, se llamará admisible.

La integral doble $I=\iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy$ tiene un valor finito determinado para cada superficie S admisible. Se plantea el problema de determinar una superficie $z=f(x,\ y)$ para la cual la integral tenga el valor mínimo en comparación con las integrales tomadas sobre las superficies admisibles próximas $z=f(x,\ y)+\alpha\cdot\eta(x,\ y)$, donde $\eta(x,\ y)$ es una función arbitraria, continua en la región D junto con sus derivadas $\frac{\partial\eta}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ y que se anula sobre el contorno C. Entonces la función $I(\alpha)=\iint_D F\Big((x,\ y,\ f(x,\ y)+\alpha\cdot\eta(x,\ y),$ $\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)dx\,dy$ debe alcanzar el mínimo cuando $\alpha=0$. En tal caso la primera variación $\delta I=\alpha\cdot I'(0)$ debe ser igual a cero. Derivando $I(\alpha)$ bajo el signo integral y poniendo allí $\alpha=0$, encontramos

$$\delta I=\alpha\cdot\left[\frac{dI}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}=\alpha\cdot\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\eta(x,\ y)+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]dx\,dy.$$

Transformamos los últimos dos sumandos por la fórmula de Green

$$\left(\iint_D\left(\frac{Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C P\,dx+Q\,dy\right):$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_D \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy=$$

$$=\int\limits_C\left(\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\,dy-\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\,dx\right)-$$

$$-\iint\limits_D \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy.$$

La integral de contorno obtenida es igual a cero, puesto que según la condición $\eta(x, y)$, sobre el contorno C se anula, y por eso, sustituyendo en la expresión para δI los dos últimos términos por su expresión nueva, encontramos

$$\delta I=\alpha\cdot\iint\limits_D \eta(x, y)\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy.$$

Con ello $\delta I = C$ para toda $\eta(x, y)$ que sea continua junto con sus derivadas parciales en la región D e igual a cero en el contorno C, para la expresión $\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)$, han sido observadas todas las condiciones del segundo lema.

Por consiguiente, $\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dF}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0$ (ecuación de Euler—Ostrogradski). Los razonamientos precedentes son también válidos por completo para la integral triple, adicionándose sólo en la ecuación un término más.

1219. (Problema de Plateau). Hallar la superficie con el área mínima, que pasa por una curva Γ dada en el espacio.

Resolución. El problema se reduce a la determinación del mínimo de la integral $\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$. Aquí $F=\sqrt{1+p^2+q^2}$.

Para este caso la ecuación de Euler—Ostrogradski adopta la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

Desarrollando esta expresión, hallamos

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqS=0,\quad \text{donde}\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad S=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Hemos obtenido una ecuación en derivadas parciales que define las superficies mínimas. Esta ecuación muestra una propiedad geométrica de estas superficies, según la cual la suma de los radios principales de curvatura en cada punto de la superficie es igual a cero. Esta suma vale

$$R_1+R_2=\frac{(1+q)\,r+(1+p^2)\,t-2pqS}{it-S^2}\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

En efecto, si la función f satisface la ecuación hallada anteriormente para las superficies mínimas, entonces $R_1+R_2=0$.

1220. Escribir la ecuación de Euler-Ostrogradski para la funcional $I=\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$

1221. Escribir la ecuación de Euler-Ostrogradski para la funcional $I=\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\varphi(x,\ y)\right] dx\,dy.$

§ 6. Forma paramétrica

Al determinar el extremo de una funcional la exigencia consistente en que la curva buscada tenga la ecuación explícita $y=y(x)$ puede reducir considerablemente el problema. En una serie de casos es conveniente examinar en calidad de curvas admisibles las definidas en forma paramétrica: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. En este caso la funcional anteriormente examinada $I=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$, adopta la forma $I=\int\limits_{t_0}^{t_1} F\left(x,\ y,\ \frac{\dot y}{\dot x}\right)\dot x\,dt$, donde $\dot x$ e $\dot y$ son derivadas con respecto a t; t_0 y t_1 son los valores del parámetro que corresponden a los extremos de las curvas. Notemos que la función subintegral no contiene la variable independiente t y es una función homogénea de primera medición de $\dot x$ y $\dot y$.

En general, examinemos cierta integral

$$I=\int\limits_{t_0}^{t_1} F(x,\ y,\ \dot x,\ \dot y)\,dt \tag{1}$$

en la cual la función subintegral no contiene la variable independiente t y es una función homogénea de primera medición de $\dot x$ e $\dot y$, o sea,

$$F(x,\ y,\ k\cdot\dot x,\ k\cdot\dot y)=k\cdot F(x,\ y,\ \dot x,\ \dot y). \tag{2}$$

Mostremos que la integral (1) no cambiará su forma al efectuar una sustitución cualquiera del parámetro t. Introducimos en lugar de t un otro parámetro τ, haciendo $\tau=\tau(t)$, además, consideramos $\tau'(t)>0$, de modo que al crecer t se incrementa también τ. Puesto que $y'_t=y'_\tau\cdot\tau'_t$, $x'_t=x'_\tau\cdot\tau'_t$, $dt=t'_\tau=d\tau\,\frac{d\tau}{\tau'}$, entonces, transformando la integral (1) de modo que se introduzca la variable τ, obtenemos:

$$I=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} F(x,\ y,\ \tau'_t\cdot x'_\tau,\ \tau'_t\cdot y'_\tau)\,\frac{d\tau}{\tau'_t}.$$

Usando la fórmula (2), tenemos

$$I=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} F(x,\ y,\ x'_\tau,\ y'_\tau)\,d\tau.$$

Con la representación paramétrica, la distancia entre las curvas se determina independientemente de la selección del parámetro t. En efecto, la curva l_1 se encuentra en el entorno ε de orden nulo de la curva l_2, si entre l_1 y l_2 se puede establecer una correspondencia biunívoca y recíprocamente continua tal, que la distancia entre los puntos correspondientes no exceda de ε. De un modo análogo puede ser determinada la proximidad ε de primer orden.

Pasando a la deducción de la condición necesaria del extremo, supongamos que cierta curva l definida por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ da el extremo a la integral I. Tomemos una curva, próxima a l, definida por las ecuaciones $x = x(t) + \alpha_1 \cdot \eta_1(t)$, $y = y(t) + \alpha_2 \cdot \eta_2(t)$, además, consideramos correspondientes los puntos que se obtienen para el mismo valor del parámetro t. Sustituyendo las ecuaciones de la curva próxima en la integral (1) e igualando a cero las derivadas respecto a α_1 y α_2 cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, obtenemos, al igual que antes, que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ deben satisfacer, cualquiera que sea la selección del parámetro t, el sistema de dos ecuaciones de Euler:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 \quad \text{y} \quad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0. \tag{3}$$

Estas ecuaciones no contienen en forma explícita el mismo parámetro. Además, una de las funciones, $x(t)$ o $y(t)$ puede considerarse arbitraria. En efecto, sustituyendo el parámetro, obtenemos las ecuaciones de la curva l: $x = x[t(\tau)]$, $y = y[t(\tau)]$. En virtud de la arbitrariedad de la selección de la función $t(\tau)$ podemos considerar a una de las funciones $x[t(\tau)]$ o $y[t(\tau)]$ función arbitraria de τ. Debido a esta circunstancia tenemos derecho esperar que las dos ecuaciones de (3) se reducen a una. Demostremos esto.

Se sabe que si la función $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ es homogénea en cuanto a las variables $\dot{x}$ e $\dot{y}$, entonces para ella tiene lugar la identidad

$$F = \dot{x} F_{\dot{x}} + \dot{y} F_{\dot{y}}.$$

Derivando ambos miembros de esta identidad por turno, con respecto a las variables x, y, $\dot{x}$ e $\dot{y}$, obtenemos

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{x} F_{x\dot{x}} + \dot{y} F_{x\dot{y}}; \quad F_y = \dot{x} F_{y\dot{x}} + \dot{y} F_{y\dot{y}}; \\ 0 &= \dot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y} F_{\dot{x}\dot{y}}, \quad 0 = \dot{x} F_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y} F_{\dot{y}\dot{y}}. \end{aligned} \tag{4}$$

De las dos últimas igualdades hallamos

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{5}$$

donde por F_1 se designa la magnitud total de tres relaciones escritas. Retornando a las ecuaciones (3) y escribiendo en ellas las derivadas con respecto a t, obtenemos:

$$F_x - \dot{x} F_{x\dot{x}} - \dot{y} F_{y\dot{x}} - \ddot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} - \ddot{y} F_{\dot{x}\dot{y}} = 0,$$

$$F_y - \dot{x} F_{x\dot{y}} - \dot{y} F_{y\dot{y}} - \ddot{x} F_{\dot{x}\dot{y}} - \ddot{y} F_{\dot{y}\dot{y}} = 0.$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $F_{\dot{x}\dot{x}}$, $F_{\dot{x}\dot{y}}$ y $F_{\dot{y}\dot{y}}$ con ayuda de la fórmula (5) y F_x, F_y según las fórmulas (4), las reducimos a la forma siguiente:

$$\dot{y}T=0, \qquad \dot{x}T=0.$$

Aquí $T=F_1(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})+F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}$.

Consideramos que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ no se anulan simultáneamente, de modo que las dos últimas ecuaciones efectivamente se reducen a una:

$$T=F_1(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})+F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}=0. \tag{6}$$

Recordando la expresión para el radio de curvatura de una curva plana, escribimos finalmente la ecuación (6) en la forma:

$$\frac{1}{R}=\frac{F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}F_1}. \tag{7}$$

1222. Hallar las extremales de la funcional

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+a^2(x\dot{y}-\dot{x}y)\right]dt \quad (a \text{ es cierto número positivo}).$$

Resolución. Aquí $F=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+a^2(x\dot{y}-\dot{x}y)$ es función homogénea positiva de primer grado con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Tenemos

$$F_{x\dot{y}}=a^2, \quad F_{\dot{x}y}=-a^2, \quad F_1=\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2}=\frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Por eso la ecuación (7) toma la forma $\frac{1}{R}=2a^2$. De este modo, las extremales son curvas con un radio constante de curvatura igual a $R=\frac{1}{2a^2}$, o sea, son arcos de las circunferencias de radio $\frac{1}{2a^2}$. En particular, son circunferencias completas si $x(t_0)=x(t_1)$ e $y(t_0)=y(t_1)$. Para hallar las ecuaciones de estas circunferencias es necesario formular ciertas condiciones de frontera para las curvas admisibles.

§ 7. Concepto de condiciones suficientes del extremo de una funcional

Hasta ahora, al examinar el problema sobre el valor extremal de la funcional $I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')\,dx$, nos hemos limitado a hallar solamente las condiciones necesarias del extremo. Hemos determinado que las condiciones necesarias tienen la forma: $\delta I=0$. Sin embargo, no hemos planteado la cuestión acerca de si concedan en realidad o no las extremales a la funcional I un máximo o un mínimo, o sea, no hemos estudiado las condiciones suficientes del extremo. Se ha mostrado que sobre la familia de las curvas admisibles $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$ la funcional I se transforma en una función ordinaria del parámetro α y, por consiguiente, la condición $I'(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$ es necesaria para que la funcional I alcance el extremo sobre la función $y(x)$. Por analogía con la función ordinaria se puede suponer que la función $y(x)$ concederá un mínimo a la funcional I, si se cumple la desigualdad $I''(\alpha)_{\alpha=0} > 0$ (en otras palabras, $\delta^2 I > 0$) y un máximo si se cumple la condición $I''(\alpha)|_{\alpha=0} < 0$ (o sea, $\delta^2 I < 0$).

Supongamos, pues, que la curva $y(x)$ es extremal de la funcional I. Puesto que

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y+\alpha\cdot\eta, y'-\alpha\cdot\eta')\,\eta - F_{y'}(x, y+\alpha\cdot\eta, y'\alpha\eta')\,\eta']\,dx,$$

entonces

$$I''(\alpha)|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} [F_{yy}\cdot\eta^2(x) + 2F_{yy'}\cdot\eta(x)\cdot\eta'(x) + F_{y'y'}\cdot\eta^2(x)]\,dx.$$

Designemos para abreviar $F_{yy'} = P$, $F_{yy'} = Q$, $F_{y'y'} = R$. Entonces la condición supuesta del mínimo de la funcional se expresará por la desigualdad

$$\int_{x_0}^{x_1} [P\eta^2(x) + 2Q\eta(x)\,\eta'(x) + R\eta'^2(x)]\,dx > 0.$$

Adicionamos al primer miembro de esta desigualdad la integral auxiliar

$$\int_{0}^{x_1} [\eta^2(x)\,\omega'(x) + 2\eta(x)\,\eta'(x)\,\omega(x)]\,dx,$$

donde $\omega(x)$ es la función arbitraria de la clase $C^{\omega}[x_0, x_1]$. El valor de esta integral auxiliar es igual a cero, ya que

$$\int_{x_0}^{x_1} [\eta^2\omega' + 2\eta\eta']\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(\eta^2\omega) \text{ y } \eta(x_0) = (x_1) = 0.$$

Entonces obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} [(P+\omega')\,\eta^2 + 2(Q+\omega)\,\eta\eta' + R\eta'^2]\,dx > 0.$$

Escogemos la función $\omega(x)$, de modo que $(Q+\omega)^2 = (P+\omega')\,R$, o sea, resolvemos con respecto a $\omega(x)$ la ecuación de Riccati. Entonces nos queda:

$$\int_{x_0}^{x_1} R\left[\eta' + \frac{Q+\omega}{R}\,\eta\right]^2 dx > 0$$

La última desigualdad se cumplirá si $R > 0$, o sea, $F_{y'y'} > 0$. La condición $F_{y'y'} > 0$ se llama condición reforzada de Legendre. Para el máximo la condición de Legendre tiene la forma: $F_{y'y'} < 0$.

En los manuales de cálculo variacional se muestra que la condición de Legendre $F_{y'y'} > 0$, en conjunto con algunas otras condiciones, asegura un mínimo débil a la integral I.

Respuestas

Capítulo I

6. $(e-1)(e^{\pi}-1)$. **7.** 5 8. 244/21. **10.** $\pi a^2/2$. **11.** $112\frac{8}{105}$.

12. $5(2\ln 2-1)/8$. **13.** $(\pi+1-2\sqrt{2})/4$. **14.** $-432/169$. **15.** 1. **16.** 26.

17. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy + \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y)\,dx$.

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^{y}}^{e} f(x, y)\,dx$. **19.** $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy$. **20.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{1} f(x, y)\,dx$.

21. $\int\limits_{0}^{1/2} dy \int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$.

22. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi-\operatorname{arcsen} y} f(x, y)\,dx$.

26. $2\pi^5$. **27.** $0{,}5\pi \ln 2$. **28.** $3\pi a^4/2$. **29.** 3π. **30.** $14\pi a^3/3$. **31.** 1/2. **32.** 0,5 ln 3. **37.** 1/6 unidades cuadradas. **38.** 64/3 unidades cuadradas **39.** $2\pi - 16/3$ unidades cuadradas. **40.** 5 unidades cuadradas. **41.** 125/18 unidades cuadradas. **42.** 1/2 unidades cuadradas. **43.** 27/2 unidades cuadradas. **44.** 4/3 unidades cuadradas **45.** $8 - \pi$ unidades cuadradas. **46.** 5π unidades cuadradas. **47.** $2\pi - 8/3$ unidades cuadradas. **51.** $8\pi - 32\sqrt{2/3}$ unidades cúbicas. **52.** 17/5 unidades cúbicas. **53.** $\pi/4$ unidades cúbicas. **54.** 88/105 unidades cúbicas. **55.** 40/3 unidades cúbicas. **56.** 32/9 unidades cúbicas. **57.** 90 unidades cúbicas. **58.** 12 unidades cúbicas. **59.** 79/60 unidades cúbicas. **60.** 4 unidades cúbicas. **61.** $a^2b/3$.**66.** $\pi(5\sqrt{5} - 1)/24$ unidades cuadradas.

67. $16\pi/3$ unidades cuadradas. **68.** $2\pi\sqrt{2}$ unidades cuadradas. **69.** $5/6 + (\sqrt{2}/4)\cdot\ln(3 + 2\sqrt{2})$ unidades cuadradas. **70.** π unidades cuadradas.

71. 32 unidades cuadradas. **72.** $40\sqrt{2/3}$ unidades cuadradas. **77.** C (45/28; 279/70). **78.** $\bar{x} = (5/6)\,a$, $\bar{y} = 0$. **79.** $\bar{x} = (3/5)\,a$, $\bar{y} = (3/8)\,a$. **80.** $\bar{x} = \bar{y} = 128a/(105\pi)$. **81.** $\bar{x} = \bar{y} = 9/20$. **82.** $\bar{x} = (6/5)\,p$, $\bar{y} = 0$. **83.** $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 4/3)$. **84.** 2,4. **85.** 8/3. **86.** 4096/105. **87.** $\pi ab^3/4$. **88.** $(2/3)\,a^4k$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. **89.** $2\pi r^2\delta$. **90.** $ab^3/12$. **95.** $abc\,(a^2 + b^2 + c^2)/3$. **96.** 1/48. **97.** 1/364. **98.** $ab^2\,(10b - 3a)/12$. **99.** $3\pi/2$.

100. $(1/5)\,\pi a^5\,(18\sqrt{3} - 97/6)$. **101.** $16\,\pi/3$. **102.** $4\pi r^3/3$. **103.** $8\pi\,(2\sqrt{2} - 1)/9$. **106.** $\pi/6$ unidades cúbicas. **107.** $8\,(3\pi - 4)/9$ unidades cúbicas. **108.** $3a^4/2$. **109.** $\bar{x} = \bar{y} = 2/5$, $\bar{z} = 7/30$. **110.** $\bar{x} = \bar{y} = 3$, $\bar{z} = 45/32$. **111.** (6/5; 12/5; 8/5). **112.** $2a^5/3$. **120.** $(\pi/2)\ln(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})$. **121.** $(\pi/2)\ln(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})$. **122.** $\pi/2\,\ln(1+\lambda)$. **123.** $\pi\alpha$. **124.** $\ln(\beta/\alpha)$. **125.** $(\pi/2)\ln(1+\lambda)$. **126.** $\ln(\lambda+1)/(\mu+1)$. **127.** $\sqrt{\pi}\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. **128.** $\pi(\sqrt{1-\lambda^2} - 1)$. **137.** 1,1645. **138.** −4,5781. **139.** 2,4240. **140.** $15\sqrt{\pi/8}$. **141.** 0,1225. **142.** 0,8934. **143.** ∞. **144.** $-2\pi\sqrt{3/7}$. **145.** $\pi\sqrt{3/5}$. **146.** $-4\pi\sqrt{2}$. **147.** $4\pi\sqrt{2/5}$. **154.** 1/24. **155.** $3\pi/16$. **156.** 8/105. **157.** $9\pi/4096$.

158. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right)}$. **159.** $\dfrac{\pi\,(2n-1)!!}{2\,(2n+2)!!}\,a^{2n+2}$

160. $\dfrac{5}{256}\,\pi$. **161.** $\dfrac{\pi}{b\,\mathrm{sen}\,(a\pi/b)}$. **162.** $\pi/\mathrm{sen}\,a\pi$. **163.** $2\pi/\sqrt{3}$.

164. $5\pi/32$. **165.** π. **166.** 1/364. **167.** $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\cdot\Gamma(m)}{k\cdot\Gamma\left(\frac{n}{k}+m\right)}$ **168.** $\pi/\sqrt{2}$.

169. $\dfrac{\pi}{u\,\mathrm{sen}\,(\pi/n)}$. **170.** $\pi/2\,(2\sqrt{2})$. **171.** $\pi/(2\,\mathrm{sen}\,n\pi)$

172. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

Capítulo II

177. 67/6. **178.** 136/3. **170.** 2152/45. **180.** 4. **181.** 12. **182.** 17,5. **183.** π. **184.** 6/35. **185.** 2. **186.** $\bar{x} = (3\ln 2 - 1)/3$, $\bar{y} = (16\ln 2 + 15)/24$. **187.** $\bar{x} = 2/5$, $\bar{y} = -1{,}5$, $\bar{z} = 1/2$.

188. $2a^2$. **189.** $(\sqrt{a^2+b^2}/ab)\,\mathrm{arctg}\,(2\pi b/a)$.

190. $\sqrt{2}\,[\pi\sqrt{1+4\pi^2} + 0{,}5\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$. **191.** 1/6.

195. $U = e^{x+y} + \mathrm{sen}\,(x-y) + 2y + C$. **196.** $U = x - e^{x-y} + \mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,y + C$. **197.** $U = (1/3)\,x^3 - x^2y^2 + 3x + (1/3)\,y^3 + 3y + C$. **198.** $U = x^2 + y^2 - (3/2)\,x^2y^2 + 2xy + C$. **199.** $U = \mathrm{ch}\,x + x\,\mathrm{ch}\,y + y + C$.

200. $U = x\,\mathrm{arcsen}\,x - y\,\mathrm{arcsen}\,y + \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} - (1/2)\,x^2\ln y + C$. **201.** π^2 (en todos los casos). **202.** 0 (en ambos casos) **205.** $\displaystyle\iint_D \frac{2y\,(x-1)}{x^2+y^2}\times$

$\times\, dx\, dy$. **206.** 8. **209.** 1/3 unidades cuadradas. **210.** πab. **211.** 45/2 unidades cuadradas. **212.** 25/6 unidades cuadradas. **213.** $6\pi r^2$ **217.** $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = (307 - 15\sqrt{5})/310$. **218.** $4\pi(1 + 6\sqrt{3})/15$. **219.** $(125\sqrt{5} - 1)/420$. **228.** 1/2. **229.** 1. **231.** 0. **232.** $12\pi a^5/5$. **233.** 0. **234.** $4\pi abc$. **235.** $6\pi a^2 h$. **236.** $\pi R^2 h(3R^2 + 2h^2)/10$. **237.** $3u$. **238.** $x + y + z$. **239.** $\pi R^2 h$. **240.** 2π. **241.** πab. **242.** $-[(y - z)\,\mathbf{i} + (z - x)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}]$. **243.** $2(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Capítulo III

271. $\frac{1}{11} + \frac{2}{102} + \frac{3}{1003} + \frac{4}{10004} + \ldots$ **272.** $\frac{1}{11} + \frac{1}{1111} + \frac{1}{111111} + \frac{1}{11111111} + \ldots$ **273.** $\frac{10^n}{2n+5}$. **274.** $\frac{2n-1}{2n}$. **275.** $\frac{2^n}{n!}$.

276. $\frac{(-1)^n}{2n+1}$. **277.** 1. **278.** 1. **279.** 1/12. **280.** m. **283.** Diverge. **284.** Converge. **285.** Converge. **286.** Diverge. **287.** Converge. **288.** Diverge. **289.** Converge. **290.** Diverge. **291.** Converge. **292.** Diverge. **293.** Diverge. **294.** Diverge. **295.** Converge condicionalmente. **296.** Converge absolutamente. **297.** Diverge. **298.** Converge condicionalmente. **299.** Converge absolutamente. **300.** Diverge. **301.** Diverge (comparar con la serie del problema precedente). **302.** Converge. **303.** Diverge. **304.** Converge. **305.** Converge. **306.** Diverge. **307.** Converge. **308.** Converge absolutamente; **309.** Diverge. **310.** Converge absolutamente. **311.** Diverge. **312.** Converge absolutamente. **313.** Converge condicionalmente. **314.** $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \ldots$ **351.** $1 - \frac{1}{1!} + \frac{4^2}{2!} = \frac{4^3}{3!} + \ldots$ **323.** En los puntos $x = 1$ y $x = 2$ diverge, en el punto $x = 3$ converge. **324.** En el punto $x = 1$ diverge, en el punto $x = 2$ converge. **325.** $0 < x < +\infty$. **326.** $1 < x < +\infty$. **327.** $-\infty < x < +\infty$. **331.** Converge uniformemente. **332.** Sí. **333.** Sí. **334.** No, la serie diverge para todo valor de x. **346.** $-\infty < x < +\infty$. **347.** $3 \leqslant x < 5$. **348.** $1 < x < 3$. **349.** La serie converge sólo en el punto $x = 0$. **350.** La serie converge cualquiera que sea el valor de x. **351.** $-1 < x < 1$. **352.** $-2 \leqslant x < 2$. **353.** $-3 < x < 3$. **354.** $-1 < x < 3$. **355.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **356.** $a/(a - x)^2$. **357.** $a \ln a/(a - x) - x$. **358.** $2a/(a - x)^3$. **359.** $-2x/(1 + x^2)^2$ **365.** $1 + x \ln 3 + \frac{x^2 \ln^2 3}{2!} + \frac{x^2 \ln^3 3}{3!} + \ldots \; (-\infty < x < +\infty)$. **366.** $1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{3!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots \; (-\infty < x < +\infty)$. **367.** $1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 + -\frac{2^6}{6!}x^6 + \ldots \; (-\infty < x < +\infty)$. **368.** $\frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 + \frac{2^7}{8!}x^8 + \ldots \ldots (-\infty < x < +\infty)$. **369.** $\ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots \; (-a < x \leqslant a)$. **370.** $\sqrt{a}\left[1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{(2a)^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{(2a)^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4}{(2a)^4 \cdot 4!} + \ldots\right] (-a < x \leqslant a)$. **370a.** $f(x, y) = 12 + 15(x - 2) + 6(x - 2)^2 + 3(x - 2)(y - 1) - 6(y - 1)^2 + (x - 2)^3 - 2(y - 1)^3$. **370b.** $f(x, y) = -4 + 13(x - 1) + 5(y + 1) + 11(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 1) - (y + 1)^2 + 4(x - 1)^3$. **370c.** $f(x, y) = 4 + 8(x - 1) - 15(y + 1) + 5(x - 1)^2 + 9(y + 1)^2$. **370d.** $f(x, y) = -1 + (x + 1) + (y - 1) - (x + 1)(y - 1) - (y - 1)^2 +$

$+ (x+1)(y-1)^2 + (y-1)^3 + 0(\rho^3)$, $\rho = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.
370e. $f(x, y) = 1 + (x-1) - y - (x-1)y + \frac{1}{2}y^2 + 0(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. **370f.** $f(x, y) = -1 + (x+1) + y^2 - (x+1)y^2 + 0(\rho^3)$, $\rho = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. **371.** $1 + \frac{2}{2!}\cdot x^4 + \frac{2^3}{4!}\cdot x^8 + \frac{2^5}{6!}\cdot x^{12} + \frac{2^7}{8!} \times x^{16} + \ldots$ $(x < |\infty|)$. **384.** 2,71828. **385.** 0,60653. **386.** 0,1564. **387.** 1,0453. **388.** 1,0196. **380.** 5,196 **390.** −0,0202. **391.** 0,0953. **392.** 1,0986. **393.** 2,3026. **394.** 0,4636. **395.** 3,142. **400.** 1/3. **401.** 1. **402.** 0,1996. **403.** 0,102. **412.** 2, −2, $2\sqrt{2}$, $-\pi/4$. **413.** $z = 13(\cos 157°23' + i \operatorname{sen} 157°23')$. **414.** i. **415.** 1. **416.** $2\cos 10°(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$. **417.** $-46 + 9i$. **418.** $(249/1025) - (68/1025)\,i$. **419.** $(5/169) + (12/169)\,i$. **420.** $5{,}831 \cos(-30°58') + i \operatorname{sen}(-30°58')$. **421.** $\sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$. **422.** $(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)\,i$. **423.** $\cos(-150°) + i \operatorname{sen}(-150°) = -(\sqrt{3}/2) - (1/2)\,i$. **424.** $\cos 22°30' + i \operatorname{sen} 22°30' = 0{,}9239 + 0{,}3827i$; $\cos 112°30' + i \operatorname{sen} 112°30' = -0{,}3827 + 0{,}9239i$; $\cos 202°30' + i \operatorname{sen} 202°30' = -0{,}9239 - 0{,}3827i$; $\cos 292°30' + i \operatorname{sen} 292°30' = 0{,}3827 - 0{,}9239i$. **425.** $w_0 = 2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) = 1{,}9318 + 0{,}5176i$; $w_1 = 2(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $w_2 = 2(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°) = -0{,}5176 - 1{,}9318i$ **426.** $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^4\varphi$, $\operatorname{sen} 4\varphi = 4\cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi - 4\cos\varphi \times \operatorname{sen}^3\varphi$. **428.** La circunferencia de radio R con centro en el punto $z = c$. **429.** 1) El conjunto de puntos del círculo limitado por la circunferencia $|z - c| = R$; 2) el conjunto de puntos del plano, que se sitúan fuera de la circunferencia $|z - c| = R$. **430.** 1) El conjunto de puntos del semiplano situado a la derecha del eje imaginario; 2) el conjunto de puntos del semiplano situado debajo del eje real. **436.** $S = 1/4 - i$. **437.** Converge. **438.** Diverge. **440.** La serie converge sobre todo el plano. **441.** La serie converge sólo en el punto $z = 1 + i$. **446.** $2e^{\pi i/6}$. **447.** $e^{-\pi i/2}$. **448.** −1. **450.** $(3/4)\operatorname{sen} x - (1/4)\operatorname{sen} 3x$. **451.** $i^i = e^{-\pi/2 + 2k\pi}$ $(k \in Z)$. **456.** $f(x) = -2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\operatorname{sen} mx}{m}$. **457.** $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$. **458.** $f(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+1} \times (\cos mx - m \operatorname{sen} mx)\right]$ **459.** $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{12}{m^3} - \frac{2\pi^2}{m}\right)\operatorname{sen} mx$.

460. 1) $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$; 2) $f(x) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2mx}{m}$. **461.** $f(x) = \frac{4h}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2m+1)x}{2m+1}$. **462.** $f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right)$. **463.** $f(x) = 2\pi \times \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^3} + \ldots\right)$.

464. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\operatorname{sen} mx}{m}$. 465. $-\frac{4}{\pi}\times$ $\times\left[\frac{\operatorname{sen} x}{2^2-1}+\frac{3\operatorname{sen} 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\operatorname{sen} 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$. 466. $\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\operatorname{sen} m\pi x}{m}$.

467. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$. 471. $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{1-4z^2}\cos\pi z$.

472. $F(z)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{ze-\operatorname{sen} z-z\cos z}{e(1+z^2)}$. 473. $f_c(z)=\frac{\operatorname{sen} z-\operatorname{sen}(z/2)}{z}\times$ $\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $f_s(z)=\frac{\cos(z/2)-\cos z}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Capítulo IV

481. $y=\arccos e^{Cx}$. 482. $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$. 483. $(1+e^x)^3\operatorname{tg} y=8$. 484. $2\ln|\operatorname{sen} y|=e^{(x-1)^2}-1$. 485. $y^3/3+\pi/4=\operatorname{arctg} e^x$. 486. $\ln|\operatorname{tg} y|=4(1-\cos x)$. 487. $2^x-2^y=3/32$. 488. $y=e^{\pm 1/(2\sqrt[4]{x+1})}$. 489. $2(x-2)=\ln^2 y$. 490. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. 491. $(1-\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-y^2})=Cxy$. 492. $2\operatorname{sen} x+\ln|\operatorname{tg}(y/2)|=C$. 493. $x^2+y\operatorname{sen} y+\cos y=C$. 494. $y=\ln\operatorname{tg}(e^x+\pi/4-1)$. 495. $y=\ln\operatorname{tg}(\operatorname{ch} x+C)$. 496. $y=a\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x/a)+C)$; la respuesta se puede escribir también en la forma $y\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{a^2-y^2}=C_1$. 497. $x+y+2\ln x-\ln y=2$. 498. $3\operatorname{arctg} x^2+2\operatorname{arctg} y^2=\pi/2$. 499. $x+y-2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\ln|(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)|=C$. 500. $\sqrt{2}\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y-\cos y=0$. 501. $\operatorname{tg}(y/2)=C[\operatorname{tg}(y/2)+1][1-\operatorname{tg}(x/2)]$. 502. $(3/2)\ln(y^2+4)+\operatorname{arctg}(y/2)=\sqrt{x^2+4x+13}-\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+13})+C$. 503. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=1$. 504. $y=\operatorname{arctg} C(1-e^x)^3$. 505. $y=C/x$. 506. $A_t=A_0e^{-kt}$. 507. 1) $\approx 56{,}6$ g. 2) $\approx 7{,}84$ h. 508. $\approx 18{,}4$ min. 509. $t=2\pi\operatorname{tg}^2\alpha(H^{5/2}-h^{5/2})/(5\sigma\omega\sqrt{2g})$; $T=2\pi\operatorname{tg}^2\alpha H^{5/2}/(5\sigma\omega\sqrt{2g})\approx 844$ s $\approx 14{,}1$ min. 510. $\approx 4{,}6$ min. 516. $Cx=e^{\cos(y/x)}$. 517. $y^2=Cxe^{-y/x}$. 518. $\ln x=(y/x)[\ln(y/x)-1]+C$. 519. $y^2=4x^2\ln Cx$. 520. $y=x\operatorname{arcsen} x$. 521. $1+\operatorname{sen}(y/x)=Cx\cos(y/x)$. 522. $\operatorname{arctg}(0{,}5y/x)-2\ln|x|=\pi/4$. 523. $y^2=x^2\ln Cx^2$. 524. $\operatorname{arctg}(y/x)=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. 525. $y=-x\ln|1-\ln x|$. 526. $(y/x)\cdot\operatorname{arctg}(y/x)=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. 527. $x^5+10x^3y^2+5xy^4=1$. 528. $16xy=(y+4x-Cx^2)^2$. 529. $\ln|y|-\cos(3x/y)=C$. 530. $y=\pm x\sqrt{C^2x^2-1}$. 531. $y-1=C(x-1)$. 534. $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$. 535. $x^2+xy-y^2-x+3y=C$. 536. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$. 537. $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$. 541. $(1/2)x^2+x\operatorname{sen} y-\cos y=C$. 542. $xy+e^x\operatorname{sen} y=C$. 543. $(1/2)x^2y+x\operatorname{sen} y=C$. 544. $(1/3)x^3+xy^2+xy+e^y=1$. 545. $ye^{x^2}+x\ln y=1$. 546. $(1+x)\operatorname{sen} y+(1-y)\operatorname{sen} x=C$. 547. $x^2\ln y+2y(x+1)=C$. 548. $x^3+3y+3x\operatorname{sen} y=C$. 549. $ye^x+(1/2)y^2=C$. 550. $x^2+y^2+2e^x\operatorname{sen} y=C$. 551. $x\ln y+y^3\cos 5x=e^3$.

552. $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + x^2 y + y \operatorname{arctg} y - (1/2) \ln(1+y^2) + y = C$. 553. $x^3 y - \cos x - \operatorname{sen} y = C$. 554. $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$. 555. $x \operatorname{tg} y + y \operatorname{ctg} x = C$. 556. $\operatorname{arctg}(x/y) - xy + e^y = C$. 557. $y = Cx - \ln x - 1$; $\mu = 1/x^2$. 558. $y = x(C - \operatorname{sen} x)$; $\mu = 1/x^2$. 550. $x = y(C+y)$; $\mu = 1/y^2$. 560. $xy - \sqrt{1-y^2} = C$; $\mu = 1/\sqrt{1-y^2}$. 569. $y = x(\operatorname{sen} x + C)$. 570. $y = e^{-x^2}(x^2/2) + C)$. 571. $\cos x\,(x + C)/(1 + \operatorname{sen} x)$. 572. $y = a(x-1)/x^n$. 573. $y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}$. 574. $y = e^{-\operatorname{arcsen} x} + \operatorname{arcsen} x - 1$. 575. $y = \operatorname{tg}(x/2)\,[(1/2)x + (1/4)\operatorname{sen} 2x + C]$. 576. $y = (1/2)x^2 \ln x$. 577. $y = -\cos x$. 578. $x = Cy + y^2$. 579. $y = \cos 3x\,[1 - (2/3)\cos 3x]$. 580. $x = Cy^2 - 1/y$. 581. $x = Cy^2 + y^4/2$. 582. $y^{-1/3} = Cx^{2/3} - (3/7)x^3$. 583. $y = (x-1)/(C-x)$. 584. $y^{-1/2} - \operatorname{tg} x = (\ln\cos x + C)/x$. 585. $y^{-4} = x^3(e^x + C)$. 586. $y = e^{-x}[(1/2)e^x + 1]^2$. 587. $y = \sec x/(x^3+1)$. 588. $x = 1/[y(y+C)]$. 589. $y = \sec^2 x/(\operatorname{tg} x - x + C)$. 590. $x^2 + y^2 = e^{-y}$. 594. $x = p \operatorname{sen} p$, $y = (p^2-1)\operatorname{sen} p + p\cos p + C$. 595. $x = e^p + C$, $y = e^p(p-1)$, o bien $y = (x-C)[\ln(x-C) - 1]$. 596. $x = 2(\ln p - p)$, $y = 2p - p^2 + C$. 597. $x = \ln[(\sqrt{1+p^2} - 1)/p] + p/\sqrt{1+p^2} + C$, $y = p/\sqrt{1+p^2}$. 598. $x = 2p + 3p^2$, $y = 2p^3 + p^2 + C$. 599. $x = p(1+e^p)$, $y = 0{,}5p^2 + (p^2 - p + 1)e^p + C$. 600. $x = e^{2p}(2p^2 - 2p + 1)$, $y = e^{2p}(2p^3 - 3p^2 + 3p - 1{,}5) + C$. 601. $x = 0{,}5\ln^2 p + \ln p + C$, $y = p\ln p$. 604. La solución general es $y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2C^2}$; La solución singular, $\begin{cases} x = -a^2p/\sqrt{b^2+a^2p^2}, \\ y = b^2/\sqrt{b^2+a^2p^2}, \end{cases}$ o bien $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. 605. La solución general es $y = Cx - 1/C$; la solución singular, $\begin{cases} x = -1/p^2, \\ y = -2/p, \end{cases}$ o bien $y^2 = -4x$. 606. La solución general es $y = Cx + C(1-C)$; la solución singular, $\begin{cases} x = 2p - 1 \\ y = p^2, \end{cases}$ o bien $y = \dfrac{1}{4}(x+1)^2$. 607. La solución general es $y = Cx + C^2 + 1$; la solución singular, $\begin{cases} x = -2p, \\ y = 1 - p^2, \end{cases}$ o bien $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$. 608. La solución general es $\begin{cases} x = C(p+1), \\ y = Cp^2/2, \end{cases}$ o bien $y = \dfrac{(x-C)^2}{2C}$; las soluciones singulares son $y = 0$, $y = -2x$. 610. $y = (1/48)x^4 + (1/8)x^2 + (1/32)\cos 2x$. 611. $y = x\cos x - 3\operatorname{sen} x + x^2 + 2x$. 612. $y = \ln\operatorname{sen} x + C_1x^2 + C_2x + C_3$. 613. $y = (1/3)\operatorname{sen}^2 x + C_1x + C_2$. 614. $y = -(x+3)e^{-x} + (3/2)x^2 + 3$. 617. $y = (3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)/24$. 618. $y = (\operatorname{arcsen} x)^2 + C_1 \operatorname{sarcsen} x + C_2$. 619. $y = \pm 4[(C_1x + a^2)^{5/2} + C_2x + C_3]/(15C_1^2)$. 620. $y = (1 + C_1^{-2}) \times \ln(1 + C_1x) - C_1^{-1}x + C_2$. 621. $y = (x^3 - 3x^2 + 6x + 4)/6$. 624. $0{,}5 \times \ln(2y+3) = C_1x + C_2$. 625. $y = e^{2x}$. 626. $\pm(x + C_2) = a\ln[(y + C_1 + \sqrt{(y+C_1)^2 - a^2})/a]$, o bien $y + C_1 = \pm a \operatorname{ch}(x + C_2)/a$. 627. $\ln y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. 628. $y = e^{(x+C_2)/(x+C_1)}$. 629. $\ln[C_1(y+1) - 1] = C_1(x + C_2)$. 630. $x = \sqrt{y} - 0{,}5C_1\ln(2\sqrt{y} + C_1) + C_2$. 633. $y = C_2e^{C_1x}$. 634. $y\sqrt{y^2 + C_1^2} + C_1^2\ln(y + \sqrt{y^2 + C_1^2}) = \pm(-y^2 + 2C_1^2x + 3C_2)$. 635. $y = C_2x + C_3 \pm 4(C_1x + a^2)^{5/2}/(15C_1^2)$. 636. $y = -\ln|1 - x|$. 636a. $y' = \pm$

$\pm\sqrt{\dfrac{k(y^2-1)}{2y}}$. 637. $y = -a \ln \cos (x/a)$. 638. $y = 1 + \ln \sec x$. 639. $s = \dfrac{m^2 g}{k^2}(e^{-kt/m} - 1) + \dfrac{mgt}{k}$. 642. $y = C_2 + (C_1 - C_2 x) \operatorname{ctg} x$. 643. $y = (1/2)\, x \ln^2 x + C_1 x \ln x + C_2 x$. 644. $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{sen}^2 x$. 647. Sí. 648. Sí. 649. No. 650. Sí. 651. Sí. 652. No. 660. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. 661. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x$. 662. $y = C_1 + C_2 e^x$. 663. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}$. 664. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x$. 665. $y = (C_1 e^{xa\sqrt{2}/2} + C_2 e^{-xa\sqrt{2}/2}) \cos (xa\sqrt{2}/2) + (C_3 e^{xa\sqrt{2}/2} + C_4 e^{-xa\sqrt{2}/2}) \times \operatorname{sen}(xa\sqrt{2}/2)$. 666. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x$. 667. $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$. 668. $y = xe^{5x}$. 669. $y = -(1/3)\, e^x \cos 3x$. 670. $y = 2 \operatorname{sen} (x/3)$. 671. $y = (5 - 2e^{-3x})/3$. 672. $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} 3x$. 673. $y = \operatorname{sen} x + (1/\sqrt{3}) \cos x$. 674. $x = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t$, o bien $x = A \operatorname{sen} (\varphi_0 + \beta t)$, $\beta = \sqrt{a/m}$. 684. $y = (e^{5x} + 22e^{3x} + e^x)/8$. 685. $y = 0{,}5x\,(x+2)\, e^{4x}$. 686. $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x) + (14 \cos x + 5 \operatorname{sen} x)/102$. 687. $y = -(11/8) \cos x + 4 \operatorname{sen} x - (1/8) \cos 3x$. 688. $y = C_1 e^{1x} + C_2 e^{2x} + (24x^2 + 52x + 41)/64$. 689. $y = 4e^{x/2} - x - 4$. 690. $y = (1/8) \operatorname{sen} 2x - (1/4)\,(x \cos 2x - 1)$. 691. $y = C_1 + C_2 e^{4x} - (1/6) \cdot (2 \operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x)$. 692. $y = (1/16)\,(4x - \pi) \operatorname{sen} 2x$. 693. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-6x} + (1/144) \times (1 - 12x)\, e^{-2x}$. 694. $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} + x\,(ae^{\alpha x} - be^{\beta x})/(\alpha - \beta)$. 695. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - (1/2)\, x - (1/10)\, x \cos 2x + (2/25) \operatorname{sen} 2x$. 696. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - (x^3/3 + x^2 + 2x)\, e^{4x}$. 697. $y = x \operatorname{ch} x$. 698. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (1/4)\, x \operatorname{sh} 2x$. 699. $y = e^{x \cos \varphi} [C_1 \cos (x \operatorname{sen} \varphi) + C_2 \operatorname{sen} (x \operatorname{sen} \varphi) + C_2 \operatorname{sen} (x + \operatorname{sen} \varphi)] + \cos x$. 700. $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) - 0{,}5xe^x \times \cos x$. 701. $y = (1/8) \cos x - (1/8) \cos 3x - (1/6) \times \operatorname{sen} 3x + (\pi/12) \times \operatorname{sen} 3x$. 701a. $y = e^{2x}\,(5 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x + 6 \operatorname{sen} x - 5 \cos x)$. 704. $m\ddot{x} + ax = A \operatorname{sen} \omega t$, $x = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t + [A/(a - m\omega^2)] \operatorname{sen} \omega t$, si $\omega \neq \beta = \sqrt{a/m}$, $yx = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t - [At/(2\beta m)] \cdot \cos \beta t$, si $\omega = \beta = \sqrt{a/m}$. 705. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - (1/\sqrt{2}) \cos x \ln |\cos x + \sqrt{\cos^2 x - 1/2}| + (1/\sqrt{2}) \times \operatorname{sen} x \operatorname{arc\,sen} (\sqrt{2} \operatorname{sen} x)$. 706. $y = C_2 e^{-3x} + (1/2)\, e^{-2x} \ln (1 + e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x} \operatorname{arctg} e^x$. 707. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + (1/4) \operatorname{sen} 2x \ln \operatorname{tg} 2x$. 708. $y = C_1 \cos (x/2) + C_2 \operatorname{sen} (x/2) + 2x \operatorname{sen} (x/2) + 4 \cos (x/2) \times \ln \cos (x/2)$. 709. $t = (3/\sqrt{g}) \ln (17 + 12\sqrt{2})$ s. 713. $y = x\,(C_1 \cos \ln x + C_2 \operatorname{sen} \ln x)$. 714. $y = C_1 x + C_2 x^3 + (1/9) \times (9 \ln^2 x + 24 \ln x + 26)$. 715. $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \operatorname{sen} \ln x - (1/3) \operatorname{sen} (2 \ln x)$. 716. $y = (\ln^2 x + 2 \ln x + 2)/(2x)$. 717. $y = (1/2)\, x^3 - (1/\ln 2)\, x^2 \ln x$. 719. $y = C_0 \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2 \cdot 4} - \dfrac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\right) = C_0 e^{-x^2/2}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico). 720. $y = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^n}{4 \cdot n!} = \dfrac{1}{4} e^{-2x} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{x}{2}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico). 721. $y = C_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} + C_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico). **722.** $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1\cdot 3 \dots (2n-1)} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4 \dots 2n}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico) **723.** $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9 \dots 4n(4n+1)}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico. **726.** $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{17x^3}{3!} + \dots$. **727.** $y = \frac{x^2}{2!} + \frac{12x^5}{5!} + \dots$. **728.** $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \dots$. **729.** $y = 4\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + 2(x-1) = 4e^{-x} + (2x-1)$. **730.** $y = 1 + x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{34x^4}{4!} + \dots$. **731.** $y = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^5 - \dots$ (las derivadas sucesivas para $x=0$ están ligadas por la relación recurrente $y_0^{(n+2)} = -y_0^{(n)} + 2ny_0^{(n-1)}$. **734.** $J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} - \dots\right)$. **735.** $y = \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[C_1 x^{3/2}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} - \dots\right) + C_2 x^{-3/2}\left(1 + \frac{x^2}{2\cdot 1} - \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 1} + \dots\right)\right]$. **736.** $y = C_1\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}+k+1\right)} + C_2\left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}+k+1\right)}$. **740.** $x = 2e^{3t} - e^t$, $y = 2e^{3t} + e^t$. **741.** $x = C_1 + C_2e^{7t} - (3/49)\,t\,(7t+2)$, $y = -(2/3)\,C_1 + (1/2)\,C_2e^{7t} + (1/49)(14t^2 - 3t - 1)$. **742.** $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + (1/8)\,e^{3t}$, $y = -C_1e^t + C_2e^{-t} + (5/8)\,e^{3t}$. **743.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sh} x$, $z = C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x + \operatorname{sh} x$. **744.** $x = (1/4)\,(3e^t + 5e^{-t}) + (1/2)\,te^t - 1$, $y = (5/4)(e^t - e^{-t}) + (1/2)\,te^t - t$. **745.** $x = (1/3)\,t + 2$, $y = (2/3)\,t + 4$. **746.** $x = (C_1 + C_2t)\,e^t + (1/2)\cos t$, $y = [C_2(1-t) - C_1]\,e^t - 2\cos t - (1/2)\operatorname{sen} t$. **747.** $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$, $y = 3C_1e^{2t} - C_2e^{-2t}$. **748.** $x = t/3 + C_2/t^3$, $y = C_1e^t - t/3 - 2C_2/t^3$. **749.** $x = -[(1+C_1)\,t + C_2]^{-1}$, $y = -C_1[(1+C_1)\,t + C_2]^{-1}$. **750.** $x = C_1e^{-6t} + e^{2t} - (3/7)\,e^t$, $y = C_2e^{-t} - (4/5)\,C_1e^{-6t} + (9/14)\,e^t$. **751.** $x = e^{tm\sqrt{2}/2} \times [C_1 \cos(tm\sqrt{2}/2) + C_2 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2)] + e^{-tm\sqrt{2}/2} \times [C_3 \cos(tm\sqrt{2}/2) + C_4 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2)]$, $y = e^{tm\sqrt{2}/2} \times [C_1 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2) - C_2 \cos(tm\sqrt{2}/2)] + e^{-tm\sqrt{2}/2} \times [C_4 \cos(tm\sqrt{2}/2) - C_3 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2)$. **752.** $x^2 = C_1^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$, $y^2 = C_2^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$, $z^2 = C_3^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$. **758.** $x_1 = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{-\alpha t}$, $x_2 = C_2e^{-\alpha t} - C_1e^{\alpha t}$. **759.** $x_1 = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$, $x_2 = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$. **760.** $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$, $x_2 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t}$, $x_3 = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$. **761.** $x_1 = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $x_2 = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$, $x_3 = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$. **762.** $x_1 = e^{12t}(C_1 \cos 5t + C_2 \operatorname{sen} 5t)$, $x_2 = e^{12t}(-C_1 \operatorname{sen} 5t + C_2 \cos 5t)$. **763.** $x_1 = 2C_1 \cos t +$

$+ 2C_3 \operatorname{sen} t$, $x_2 = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\operatorname{sen} t$. **764.** $x_1 = 2C_1e^{-t} + 2(4C_3 + C_2)\cos t - 2(4C_2 - C_3)\operatorname{sen} t$, $x_2 = -2C_1e^{-t} + 3(5C_2 + 3C_3) \times \cos t + 3(5C_3 - 3C_2)\operatorname{sen} t$, $x_3 = C_1e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)\operatorname{sen} t$. **765.** $x = e^{at}(C_1t + C_2)$, $y = e^{at}(C_1t + C_2 - C_1)$. **766.** $x = -2e^t(C_1 \operatorname{sen} 2t - C_2 \cos 2t)$, $y = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t)$. **767.** $x = e^t(C_1t + C_2)$, $y = e^t(C_1 - 2C_2 - 2C_1t)$.

Capítulo V

773. $P(A) = 0$ (el evento es imposible). **774.** 1/4. **775.** 1) 1; 2) 1/5; 3) 3/5. **776.** 499/1998. **777.** 1/406. **786.** 1) $a/(a+b+c)$; 2) $b/(a+b+c)$; 3) $c/(a+b+c)$; 4) $(a+b)/(a+b+c)$; 5) $(a+c/(a+b+c)$; 6) $(b+c)/(a+b+c)$. **787.** $bd(a+b)^{-1}(c+d)^{-1}$. **788.** $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$. **789.** $1 - 3\alpha$. **790.** 1/3. **791.** $\simeq 0{,}88$. **792.** 1) 22/145; 2) 51/145; 3) 72/145. **793.** 0,7. **794.** 0,375. **799.** 7/64. **800.** 21/32. **801.** 4/9. **802.** 27/128. **806.** 15. **808.** No, el problema siempre tiene solución, ya que $(m_0 + q)/p - (m_0 - p)/p = (p+q)/p = 1/p > 1$. **809.** El primer obrero, 114 artículos; el segundo, 112. **810.** 60. **815.** 1/3.

822

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

823

x_i	3	4	5	6	7
p_i	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

824. 1) $a = 1/\pi$; 2) $P(a/2 < X < a) = 1/3$. **825.** $P(\pi < X < \infty) = 1/4$.

826. $a = 5$; $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 0{,}5(1 - \cos x), & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 1, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$

827. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 5/6, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

830

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

$M(X) = 3{,}00$; $D(X) = 1{,}20$.

831. $\lambda = 1/4$; $M(X) = 16/15$; $\sigma_x = \sqrt{44/225} = 0{,}44$. **834.** $\overline{M} = 20$. **835.** $a = 0{,}75$; $\overline{M} = \mu = 3$. **838.** $P(3 < x < 5) = (5 - 3)\cdot(1/6) = 1/3$. **839.** 2/5. **842.** 0,000055. **843.** $M(X = m/n) = p$. $D(X) = pq/n$. **849e.** $M[X] = 0{,}4$. $D[X] = 0{,}16$, $\sigma[X] = 0{,}4$. **849f.** $P(0{,}15 < X < 0{,}6) = 0{,}3349$. **849g.** $M[X] = 4$. **849h.** $P(0{,}3 < T < \infty) = e^{-5\cdot 0{,}3} - e^{-1{,}5} = 0{,}2231$. **849i.** $F(24) = 0{,}3812$ es la probabilidad de que el elemento falle. $F(24) = 0{,}6188$ es la probabilidad de que el elemento no falle. **849j.** $R(1000) = e^{-0{,}002\cdot 1000} = e^{2} = 0{,}1358$. **852.** 4,4%; el resultado obtenido no depende del valor numérico de m. **853.** 0,34; 0,14; 0,02; **854a.** 0,424. **854b.** 0,8185. **854c.** 0,9876. **854d.** $\delta = 0{,}49$ N. **854e.** 0,7328. **854i.** 0,018. **854j.** 0,091.

854k. 0,156.. **857.** $\alpha_1 = 4$; $\alpha_2 = 20$; $\alpha_3 = 116{,}8$; $\alpha_4 = 752$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4$; $\mu_3 = 4{,}8$; $\alpha_4 = 35{,}2$; $S_k = 0{,}6$; $E_x = -0{,}8$. **858.** $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 7/6$; $\alpha_3 = 3/2$; $\alpha_4 = 31/15$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1/6$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 1/15$; $S_k = 0$; $E_x = -0{,}6$. **859.** $\lambda = 1/2$; $E_x = 3$.

864. $P\left(\left|\frac{m}{10\,000} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geqslant \frac{31}{36}$.

865. $P\left(\left|\frac{m}{50} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{5} \geqslant \frac{7}{8}\right.$. **866.** 3/4. **869.** 0,954. **870.** 61.

878. 1) $\lambda = 1/20$; 2) $m_x = 22$, $m_y = 41$; 3) $\sigma_x^2 = 56$, $\sigma_y^2 = 259$; 4) $r_{xy} = 0{,}56$. **879.** 1) $a = 24$; 2) $m_x = m_y = 2/5$; 3) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1/25$; 4) $r_{xy} = -2/3$. **880.** 1) $a = \sqrt[4]{2/\pi}$; 2) $m_x = m_y = 0$; 3) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1/(3\sqrt{2\pi})$; 4) $r_{xy} = 0$. **883.** $r_{xy} = 0{,}664$; $\overline{y}_x = 3{,}64x - 0{,}15$; $\overline{x}_y = 0{,}12y + 1{,}24$. **884.** $r_{xy} = 0{,}321$; $\overline{y}_x = 1{,}21x - 2{,}45$; $\overline{x}_y = 0{,}085y + 10{,}58$. **891.** $\overline{x} = 10{,}005$; $D(X) = 0{,}010475$; $\sigma(X) = 0{,}1023$. **892.** $\overline{y} = 10{,}64$; $D(Y) = 34{,}97$. **896.** $\alpha_1 = 6{,}32$; $\alpha_2 = 44{,}64$; $\alpha_3 = 340{,}16$; $\alpha_4 = 2743{,}68$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4{,}6976$; $\mu_3 = -1{,}3425$; $\mu_4 = 56{,}422$; $S_k(X) = -0{,}132$; $E(X) = -0{,}442$.

898. $M(X) = 4{,}13$; $D(X) = 9{,}07$; $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < -1{,}09; \\ 0{,}096, \text{ si } -1{,}09 \leqslant x \leqslant 9{,}35; \\ 0, \text{ si } x > 9{,}35. \end{cases}$

900. $M(x) = 5{,}06$; $D(X) = 5{,}01$. **902.** $M(X) = 8{,}02$. $D(X) = 8{,}23$. $\sigma(X) \approx 2{,}87$, $f(x) = 1/(2{,}87\sqrt{2\pi})\, e^{-(x-8{,}02)^2/(2\cdot 2{,}87^2)}$.

Capítulo VI

914. $z = xy + \varphi(x) + \psi(y)$. **915.** $z = x\varphi_1(y) + \varphi_2(y) + y\varphi_3(x) + \varphi_4(x)$. **919.** $\operatorname{tg}(z/2) = \operatorname{tg}(x/2)\cdot\psi\left(\frac{\operatorname{tg}(y/2)}{\operatorname{tg}(x/2)}\right)$. **920.** $z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2)$. **921.** Paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$. **925.** $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$, $\xi = y/x$, $\eta = y$. **926.** $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = 3x + y$. **927.** $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0$, $\xi = y^2$, $\eta = x^2$. **931.** $u = x(1-t)$. **932.** $u = (\cos x \operatorname{sen} at)/a$. **933.** $u = -\operatorname{sen} x$. **937.** $u(x, t) = -(0{,}9/\pi^2)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)\operatorname{sen}(2\pi k/3)\operatorname{sen}(k\pi x/3)\cdot\cos(k\pi at/3)$. **938.** $u = (96h/\pi^5)\times \times\sum_{k=0}^{\infty} 1/[(2k+1)^5]\cos(2k+1)\pi at\cdot\operatorname{sen}(2k+1)\pi x$. **939.** $u(x, t) = \frac{4hl^2}{\pi^3 a}\sum_{k=1}^{\infty}\times \times\frac{1}{k^2}\,\frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)\cos(k\pi h/1)}{l^2 - k^2h^2}\operatorname{sen}(k\pi x/l)\operatorname{sen}(k\pi at/l)$. **943.** $u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}}\right) - 2\cdot\frac{x}{l}\cdot\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)\right] + \frac{1}{l}\times \times\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left[e^{-(x+l)^2/(4t)} - 2e^{-x^2/(4t)} + e^{-(x-l)^2/(4t)}\right]$. **944.** $u(x, t) = \frac{u_0}{2}\cdot\Big[\Phi\times$

$\times\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\Big]$. **945.** $u(x,\quad t)=\frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\times$ $\times e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\cdot\text{sen}\,\frac{(2n+1)\pi x}{l}$. **947.** $u=u_a+(u_b-u_a)\cdot[\ln(r/a):\ln(b/a)]$. **949.** $u(r,\ \Theta)=(8/3)\,\text{sh}\,(\ln r)\cdot\text{sen}\,\Theta$.

Capítulo VII

956. 1) $w=i$; 2) $w=-e^{\pi}$; 3) $w=ei$. **957.** $(1+i)/2$; i; $(3-2i)/13$. **959.** $(1/2)\ln 2+(2k\pi-\pi/4)\,i$, $k\in Z$. **961.** $z=\pm i\ln(2+\sqrt{3})$. **962.** $i\ln(1\pm\sqrt{2})$. **963.** 1,1752i. **964.** 0,772 + 1,018i. **965.** 1) $e^{\cos 1}[\cos\times\times(\text{sen}\,1)+i\,\text{sen}\,(\text{sen}\,1)]$; 2) $\cos e+i\,\text{sen}\,e$. **971.** No. **972.** $f'(z)=3z^2$. **973.** $f'(z)=\cos z$. **974.** $\varphi(y)=ay+C_1$, $\psi(x)=-ax+C_2$, $f(z)=Az+{}+C$, $A=-ai$, $C=C_1+C_2$. **975.** $\lambda=-1$, $f(z)=-iz$. **976.** $a=0$. **77.** $f(z)=2^z+C$. **978.** $f(z)=-\cos z+C$. **983.** $u=4-v^2/16$, $u={}=v^2/4-1$. **984.** $v=(u^2-1)/2$. **985.** $u=1$, $v=0$. **986.** $u=x\cos\varphi-{}-y\,\text{sen}\,\varphi$; $v=x\,\text{sen}\,\varphi+y\cos\varphi$, o sea, la transformación de las coordenadas al girar los ejes. **987.** $u=(v/2)^{2/3}-(v/2)^{4/3}$. **996.** $1+i$. **996a.** $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $k={}=6$. **996b.** $\alpha=0$, $k=\frac{1}{4}$. **996c.** $\alpha=0$, $k=1$. **997.** $-(1+i)/3$. **997a.** $|z|={}=\frac{1}{2}$. **997b.** $|z-1|=\frac{1}{2}$. **997c.** Re $z=0$. **997d.** $\arg z=-\frac{\pi}{2}$. **998.** 0. **999.** 0. **1000.** $2\pi i$. **1001.** $2\pi i\,(a+b)$. **1010.** La región de convergencia es $1<{}<|z|<2$. **1011.** La serie diverge en todos los puntos del plano. **1012.** 1) $f(z)={}=-z^2-z^3-z^4-\ldots$; 2) $f(z)=z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots$. **1013.** $\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{5!}+{}+\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}+\ldots$. **1014.** ± 1 son polos de primer orden; $\pm i$ son polos de segundo orden. **1015.** $f(z)=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots$; la región de convergencia es $|z-1|<1$. **1016.** $f(z)=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots$; la serie converge en todo el plano. **1017.** $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}(z^n+z^{-n})$. **1027.** $2i$. **1028.** 1; -1. **1029.** -1. **1030.** 1. **1031.** $2\pi a^2$. **1032.** $2\pi i$. **1033.** 0. **1034.** $2\pi/(3-i)$. **1035.** $3\pi/8$.

Capítulo VIII.

1041. $\bar{f}(p)=\frac{2}{p\,(p^2+4)}$. **1042.** $\bar{f}(p)=\frac{p\,(p^2+2p+3)}{(p-1)\,(p^2-2p+p)}$. **1043.** $\bar{f}(p)={}=\frac{p}{p^2-b^2}$. **1044.** $\bar{f}(p)=\frac{a\,(p^2-a^2-b^2)}{p\,[(p-a)^2+b^2]\,[(p+a)^2+b^2]}$. **1045.** $\bar{f}(p)={}=\frac{b\,(p^2+a^2-b^2)}{[(p-a)^2+b^2]\,[(p+a)^2+b^2]}$. **1046.** $\bar{f}(p)=\frac{p\,(p^2-a^2+b^2)}{[(p-a)^2+b^2]\,[(p+a)^2+b^2]}$.

1047. $\bar{f}(p)=\dfrac{2pb}{(p^2-b^2)^2}$. **1053.** $f(t)=1/4-(1/3)\cos t+(1/12)\cos 2t$. **1054.** $f(t)=-(1/3)e^t+(1/4)e^{2t}+(1/12)e^{-2t}$. **1055.** $f(t)=1-2e^t+e^{3t}$, **1056.** $f(t)=1/4-(1/3)\operatorname{ch} t+(1/12)\operatorname{ch} 2t$. **1057.** $f(t)=\dfrac{t^k}{k!}-\dfrac{a^k\cdot t^{2k}}{(2k)!}+\dfrac{a^{2k}\cdot t^{3k}}{(3k)!}-\dots$.

1061. $1-\cos t\leftarrow\dfrac{1}{p^2}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$. **1062.** $f(t)=\int_0^t\cos(t-\tau)\cos\tau\, d\tau=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} t+t\cos t)$. **1063.** $(1-2p)\cdot\bar{y}(p)$. **1064.** $(p^3-p^2+2p-2)\cdot\bar{y}(p)-p-1$. **1065.** $\dfrac{\bar{y}\,p()}{p}\cdot(p^2-1)$.

1072. $y=e^{2t}$. **1073.** $y=\operatorname{sh} t$. **1074.** $y=0$. **1075.** $y=(1/3)te^t-(7/9)e^t-(2/9)e^{-2t}$. **1076.** $y=-(5/2)e^t+4e^{2t}-(3/2)e^{3t}$. **1077.** $x=(5/2)e^{2t}-(1/2)e^{-2t}$, $y=(5/2)e^{2t}-(1/2)e^{-2t}$. **1078.** $x=(6/5)e^{5t}-(1/5)e^{-5t}$, $y=(3/5)e^{5t}+(2/5)e^{-5t}$. **1079.** $y(t)=1$. **1080.** $y(t)=t$. **1083.** $2e^t-4t-3$ **1084.** $-1/6+(1/2)e^t-(1/2)e^{2t}+(1/6)e^{3t}$. **1085.** $(1/8)(2t^2+6t+3)e^t-(1/24)e^{-t}+(2/3)\operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2+\pi/6)$. **1090.** $u(x,t)=A\cos(n\pi at/l)\times\cos(n\pi x/l)$. **1091.** $u(x,t)=B\operatorname{sen}(n\pi at/l)\operatorname{sen}(n\pi x/l)$. **1092.** $u(x,t)=A\,Erf(\alpha x/(2\sqrt{t}))$.

Capítulo IX

1098. $]0,\ 1[,\ ]2,\ 3[,\ ]6,\ 7[$. **1099.** $]-4,\ -3[,\ ]0,\ 1[,\ ]3,\ 4[$. **1100.** 1,94. **1101.** 2,09. **1102.** 0,33; 1,30. **1103.** −1,15. **1104.** 1,11. **1105.** 0,42. **1106.** 3,62 **1107.** −0,56. **1108.** 1,27. **1114.** $\xi=1{,}70997$. **1115.** $\xi=1{,}23429$. **1118.** 2,214. **1119.** 1,37973. **1120.** −1,4142. **1123.** $y=-(2x^3-15x^2+25x-9)/3$. **1124.** $y=0{,}2\,(x^3-13x^2+69x-92)$. **1125.** $y=2x-1$.

1128

x	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
$\lg x$	0,8129	0,8195	0,8261	0,8325	0,8388	0,8451

129. 39,0625. **1130.** $f(x)=x^3+x^2+x+1$. **1135.** 0,5000. **1136.** 1,169121; $\delta_S=-0{,}000004$; el valor exacto de la integral es $4(\sqrt{2}-1)-2\ln[(2\sqrt{2}+1)/3]\approx 1{,}16912\ldots$. **1137.** $|\delta_T|\leqslant(h^2/12)\cdot(b-a)\cdot M_1\approx 0{,}07$ (M_1 es el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo de integración. Por eso es necesario efectuar el cálculo con tres cifras decimales (para obtener dos cifras decimales exactas) : $I\approx 1{,}35$. **1138.** 0,69. **1139.** 0,24. **1140.** 0,75. **1141.** 0,67. **1147.** 183; 552. **1153.** El valor exacto de $I=62{,}572$; 1) $I=62{,}673$; $\delta=0{,}12\%$; 2) $I=62{,}730$; $\delta=0{,}03\%$; 3) $I=66{,}509$; $\delta=5{,}99\%$. **1154.** El valor exacto de $J=0{,}747$; 1) $I=0{,}746$; $\delta=0{,}13\%$; 2) $I=0{,}800$, $\delta=7{,}1\%$. **1158.**

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,2	1,45	1,78

1159.

y	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,001	0,005	0,014

1160.

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y	4	5,8	9,44	18,78	54,86

1161.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
y	1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,27	1,24

1162.

t	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
x	1	1	1,07	1,17	1,30	1,45
y	1	1,4	1,8	2,21	2,63	3,06

1165.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	−1	−0,975	−0,949	−0,921	−0,888	−0,842	−0,802	−0,744	−0,675	−0,593	−0,495

1166.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	1,05	1,12	1,20	1,29	1,39	1,50	1,62	1,75	1,89	2,03

1168. 1,78. **1169.** 0,02. **1172.** $y_1=(1/3)\,x^3$, $y_2=(1/3)\,x^3+(1/63)\,x^7$, $y_3=(1/3)\,x^3+(1/63)\,x^7+(2/2079)\,x^{11}+(1/59535)\,x^{15}$. **1173.** $y=e^{-\operatorname{sh} x}$. **1174.** $y_n=1-x+2\left[\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}\right]+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ $(n=3, 4, 5, \ldots)$; sucesión bilateral. **1175.** $y_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}^m x}{m!}$; la solución auténtica es $y(x)=e^{\operatorname{sen} x}$; sucesión de las funciones inferiores. **1176.** $y_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}^m (x^2)}{m!}$; la solución auténtica es $y(x)=e^{\operatorname{sen}(x^2)}$; sucesión de las funciones inferiores.
1179. $y=0,279x+71,14$.
1180. $S=11,58e^{0,2898t}$. **1182.** $y=111,7+1,663x+0,00437x^2$. **1183.** $S=33,02t^{1,065}$. **1187.** 1) $y=3,023x-1,08$; 2) $y=0,992x-0,909$; 3) $y=-1,802x+2,958$. **1188.** 1) $y=-0,145x^2+3,324x-12,794$; 2) $y=1,009x^2-4,043y+5,045$; 3) $y=-0,102x^2+0,200x+0,806$. **1189.** $S=5,7t^{1,97}$. **1190.** 1) $S=92e^{-0,15t}$; 2) $S=0,49e^{0,44t}$. **1192.** $\varphi(x)=0,2723x^2+0,5003x+1,3424$. **1193.** $\varphi(x)=0,670x^3-0,728x^2-0,350x+0,943$.

Capítulo X

1206. No tiene solución. **1207.** $I=x_1e^{y_1}-x_0e^{y_0}$. La integral no depende del camino de integración. **1208.** $y=x$. **1209.** $y=\frac{1}{4}x^2-x+1$. **1210.** $y=\sqrt{8+6x-x^2}$. **1211.** $y=0$. **1212.** $y=\sqrt{2}\,e^{x/2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. **1214.** $y(x)\equiv 0$. **1215.** $y=(1-x)\operatorname{sh} x$. **1217.** $y=\frac{1}{x}$, $z=\frac{2}{x^3}-1$. **1218.** $y=\frac{4}{3x^3}-\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{x}$. **1220.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **1221.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi(x, y)$.

Suplemento

Tabla 1

Valores de la función gamma $\Gamma(p)$ (si $1 \leqslant p \leqslant 2$)

p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$
1,00	1,0000	1,25	0,9054	1,50	0,8862	1,75	0,9191
1,01	0,9943	1,26	9044	1,51	8866	1,76	9214
1,02	9888	1,27	9025	1,52	8870	1,77	9238
1,03	9835	1,28	9007	1,53	8876	1,78	9262
1,04	9784	1,29	8990	1,54	8882	1,79	9288
1,05	9735	1,30	8975	1,55	8889	1,80	9314
1,06	9687	1,31	8960	1,56	8896	1,81	9341
1,07	9642	1,32	8946	1,57	8905	1,82	9368
1,08	9597	1,33	8934	1,58	8914	1,83	9397
1,09	9555	1,34	8922	1,59	8924	1,84	9426
1,10	9514	1,35	8912	1,60	8935	1,85	9456
1,11	9474	1,36	8902	1,61	8947	1,86	9487
1,12	9436	1,37	8893	1,62	8959	1,87	9518
1,13	9399	1,38	8885	1,63	8972	1,88	9551
1,14	9364	1,39	8879	1,64	8986	1,89	9584
1,15	9330	1,40	8873	1,65	9001	1,90	9618
1,16	9298	1,41	8868	1,66	9017	1,91	9652
1,17	9267	1,42	8864	1,67	9033	1,92	9688
1,18	9237	1,43	8860	1,68	9050	1,93	9724
1,19	9209	1,44	8858	1,69	9068	1,94	9761
1,20	9182	1,45	8857	1,70	9086	1,95	9799
1,21	9156	1,46	8856	1,71	9106	1,96	9837
1,22	9131	1,47	8856	1,72	9126	1,97	9877
1,23	9108	1,48	8857	1,73	9147	1,98	9917
1,24	9085	1,49	8859	1,74	9168	1,99	9958
						2,00	1,0000

Valores de las funciones

$$\Phi(x)=erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \overline{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0,00	0,0000	0,0000	0,60	0,6039	0,2257	1,20	0,9103	0,3849	1,80	0,9891	0,4641
02	0226	0080	62	6194	2324	22	9155	3888	82	9899	4656
04	0451	0160	64	6346	2389	24	9205	3925	84	9907	4671
06	0676	0239	66	6494	2454	26	9252	3962	86	9915	4686
08	0901	0319	68	6638	2517	28	9297	3997	88	9922	4699
0,10	1125	0398	0,70	6778	2580	1,30	9340	4032	1,90	9928	4713
12	1348	0478	72	6914	2642	32	9381	4066	92	9934	4726
14	1569	0557	74	7047	2703	34	9419	4099	94	9939	4738
16	1790	0636	76	7175	2764	36	9456	4131	96	9944	4750
18	2009	0714	78	7300	2823	38	9490	4162	98	9949	4761
0,20	2227	0793	0,80	7421	2881	1,40	9523	4192	2,00	9953	4772
22	2443	0871	82	7538	2939	42	9554	4222	05	9963	4798
24	2657	0948	84	7651	2995	44	9583	4251	10	9970	4821
26	2869	1026	86	7761	3051	46	9610	4279	15	9976	4842
28	3079	1103	88	7867	3106	48	9636	4306	20	9981	4860
0,30	3286	1179	0,90	7969	3159	1,50	9661	4332	2,25	9985	4877
32	3491	1255	92	8068	3212	52	9684	4357	30	9988	4892
34	3694	1331	94	8163	3264	54	9706	4382	35	9991	4906
36	3893	1406	96	8254	3315	56	9726	4406	40	9993	4918
38	4090	1480	98	8342	3365	58	9745	4429	45	9995	4928
0,40	4284	1554	1,00	8427	3413	1,60	9763	4452	2,50	9996	4938
42	4475	1628	02	8508	3461	63	9780	4474	60	9998	4953
44	4662	1700	04	8586	3508	64	9796	4495	70	9999	4965
46	4847	1772	06	8661	3554	66	9811	4515	80	9999	4974
48	5027	1844	08	8733	3599	68	9825	4535	2,90	0,9999	4981
0,50	5205	1915	1,10	8802	3643	1,70	9838	4554	3,00	1,0000	4986
52	5379	1985	12	8868	3686	72	9850	4573	20	1,0000	4993
54	5549	2054	14	8931	3729	74	9861	4591	40	1,0000	4996
56	5716	2123	16	8991	3770	76	9872	4608	60	1,0000	4998
0,58	0,5879	0,2190	1,18	0,9048	0,3810	1,78	0,9882	0,4625	3,80	1,0000	0,4999

Valores de la función $z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Valores de las probabilidades para el criterio χ^2

χ^2 \ r	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	6600	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0156	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21			0001	0003	0008	0018	0038	0071
22			0002	0002	0005	0012	0025	0049
23			0000	0001	0003	0008	0017	0034
24				0001	0002	0005	0011	0023
25				0001	0001	0003	0008	0016
26				0000	0001	0002	0005	0010
27					0001	0001	0003	0007
28					0000	0001	0002	0005
29						0001	0001	0003
30						0000	0001	0002

χ^2 \ r	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,9994	0,9998	0,9899	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	9915	9963	9985	9994	9998	9999	1,0000	1,0000
3	9643	9814	9907	9955	9979	9991	0,9896	0,9998
4	9114	9473	9699	9834	9912	9955	9977	9989
5	8343	8912	9312	9580	9752	9858	9921	9958
6	7399	8153	8734	9161	9462	9665	9797	9881
7	6371	7254	7991	8576	9022	9347	9576	9733
8	5341	6288	7133	7851	8436	8893	9238	9489
9	4373	5321	6219	7029	7729	8311	8775	9134
10	3505	4405	5304	6160	6939	7622	8197	8666
11	2757	3575	4433	5289	6108	6860	7526	8095
12	2133	2851	3626	4457	5276	6063	6790	7440
13	1626	2237	2933	3690	4478	5265	6023	6728
14	1223	1730	2330	3007	3738	4497	5255	5987
15	0909	1321	1825	2414	3074	3782	4514	5246
16	0669	0996	1411	1912	2491	3134	3821	4530
17	0487	0744	1079	1496	1993	2562	3189	3856
18	0352	0550	0816	1157	1575	2068	2627	3239
19	0252	0403	0611	0885	1231	1649	2137	2687
20	0179	0293	0453	0671	0952	1301	1719	2202
21	0126	0211	0334	0504	0729	1016	1368	1785
22	0089	0151	0244	0375	0554	0786	1078	1432
23	0062	0107	0177	0277	0417	0603	0841	1137
24	0043	0076	0127	0203	0311	0458	0651	0895
25	0030	0053	0091	0148	0231	0346	0499	0698
26	0020	0037	0065	0107	0170	0259	0380	0540
27	0014	0026	0046	0077	0124	0193	0287	0415
28	0010	0018	0032	0055	0090	0142	0216	0316
29	0006	0012	0023	0039	0065	0104	0161	0239
30	0004	0009	0016	0028	0047	0076	0119	0180

Valores de la función $P(\lambda) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2}$

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,00	1,0000	0,45	0,9874	0,90	0,3927	1,70	0,0062
0,05	1,0000	0,50	9639	0,95	3275	1,80	0032
0,10	1,0000	0,55	9228	1,00	2700	1,90	0015
0,15	1,0000	0,60	8643	1,10	1777	2,00	0007
0,20	1,0000	0,65	7920	1,20	1122	2,10	0003
0,25	1,0000	0,70	7112	1,30	0681	2,20	0001
0,30	1,0000	0,75	6272	1,40	0397	2,30	0,0001
0,35	0,9997	0,80	5441	1,50	0222	2,40	0,0000
0,40	0,9972	0,85	4653	1,60	0,20	2,50	0,0000

Tabla VI

Valores de los números aleatorios

8574	9005	1894	3523	3393	5407	9659	5868
4575	4518	7032	7293	9108	0469	7435	2574
4999	3186	1426	1027	7891	7805	8928	6291
7627	7982	4865	2229	9085	7294	7239	7866
4315	1114	2339	0882	2638	5480	6189	3150
6987	9333	4247	2059	1313	1017	9391	7082
0387	1998	2910	5626	3897	0858	0575	4977
5581	1837	4731	8516	4380	8396	2414	0248
6531	4216	6454	6476	1618	7813	4959	0228
5735	3384	5146	5685	4858	2712	7675	7509
6092	1047	8196	0206	5354	7141	7078	0361
1791	1900	0649	0517	0905	2418	2220	9142
9746	1508	8704	6493	1420	5230	7110	1995
0118	4493	2560	1798	3218	3517	9851	3834
0986	3203	3476	8965	9697	0319	6272	5697
8057	1656	1515	4534	0912	7526	0460	9908
5161	6171	9125	5460	4636	5172	9737	3621
2961	3698	1913	9197	2515	2023	3619	7302
1494	0692	2594	6917	5964	3632	0602	6722
8153	2484	0961	1558	7848	0761	3853	8582
0703	9602	0190	1810	5192	7016	8483	7998
6928	6521	8548	2737	8438	8805	6029	9199
6961	3678	1935	8762	8166	2064	8760	6554
2030	1683	7322	6906	6158	4213	2720	0777
3503	2614	2532	4940	6061	0806	1913	3769

Valores de la función e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0.00	1.0000	0.50	0.6065	1.00	0.3679	50	2231
01	9900	0.51	0.6005	1.01	0.3642	1.51	0.2209
02	9802	52	5945	02	3606	52	2187
03	9704	53	5886	03	3570	53	2165
04	9608	54	5827	04	3534	54	2144
05	9512	55	5769	05	3499	55	2123
06	9418	56	5712	06	3465	56	2101
07	9324	57	5655	07	3430	57	2080
08	9231	58	5599	08	3396	58	2060
09	9139	59	5543	09	3362	59	2039
0.10	0.9048	0.60	0.5486	1.10	0.3329	1.60	2019
11	8958	61	5433	11	3296	61	1999
12	8860	62	5379	12	3263	62	1979
13	8781	63	5326	13	3230	63	1959
14	8694	64	5273	14	3198	64	1940
15	8607	65	5221	15	3166	65	1921
16	8521	66	5166	16	3135	66	1901
17	8437	67	5117	17	3104	67	1882
18	8353	68	5066	18	3073	68	1864
19	8270	69	5016	19	3042	69	1845
0.20	8187	0.70	0.4966	1.20	0.3012	1.70	1827
21	8106	71	4916	21	2982	71	1809
22	8025	72	4868	22	2952	72	1791
23	7945	73	4819	23	2923	73	1773
24	7866	74	4771	24	2894	74	1755
25	7781	75	4724	25	2865	75	1738
0.26	0.7711	0.76	0.4677	1.26	0.2836	1.76	0.1720
27	7634	77	4630	27	2808	77	1703
28	7558	78	4584	28	2780	78	1686
29	7483	79	4538	29	2753	79	1670
0.30	0.7408	0.80	0.4493	1.30	0.2725	1.80	0.1653
31	7334	81	4449	31	2692	81	1637
32	7261	82	4404	32	2671	82	1620
33	7189	83	4361	33	2645	83	1604
34	7118	84	4317	34	2618	84	1588
35	7047	85	4274	35	2592	85	1572
36	6977	86	4232	36	2567	86	1557
37	6907	87	4189	37	2541	87	1541
38	6839	88	4148	38	2516	88	1526
39	6777	89	4107	39	2491	89	1511
0.40	0.6703	0.90	0.4066	1.40	0.2466	1.90	1496
41	6636	91	4025	41	2441	91	1481
42	6571	92	3985	42	2417	92	1466
43	6505	93	3946	43	2393	93	1451
44	6440	94	3906	44	2369	94	1437
45	6376	95	3867	45	2346	95	1423
46	6313	96	3829	46	2322	96	1409
47	6250	97	3791	47	2289	97	1395
48	6188	98	3753	48	2276	98	1381
49	6126	99	3716	49	2254	99	1367

X	e^{-x}	X	e^{-x}	X	e^{-x}	X	e^{-x}
2.00	0.1353	10	0166	20	0020	20	00027
2.10	0.1225	20	0150	30	0018	30	00025
20	1108	30	0136	40	0017	40	00022
30	1003	40	0123	50	0015	50	00020
40	0907	50	0111	60	0014	60	00018
50	0821	4.60	0.0101	70	0012	70	00017
60	0743	70	0091	80	0011	80	00015
70	0672	80	0082	90	0010	90	00014
80	0608	90	0074	7.00	0.0009	9.00	0.00012
90	0550	5.00	0.0067	7.10	0.0008	10	00011
3.00	0.0498	10	0061	20	0007	20	00010
10	0450	20	0055	30	00067	30	00009
20	0408	30	0050	40	00061	40	00008
30	0369	40	0045	50	00053	50	00007
40	0334	50	0041	60	00050	9.60	0.00007
50	0302	60	0037	70	00045	70	00006
60	0273	70	0033	80	00041	80	00005
70	0247	80	0030	90	00037	90	00005
80	0224	90	0027	8.00	0.00033	10.00	0.00004
90	0202	6.00	0.0025	10	00030		
4.00	0.0183	10	0022				

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú. I-110, GSP, URSS.